

Introduzione alla Meccanica Quantistica Relativistica.

Simone Piccardi

17 febbraio 2011

Copyright © 2002 Simone Piccardi. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being “Prefazione”, with no Front-Cover Texts, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

Indice

Prefazione	v
1 La relatività ristretta	1
1.1 Nozioni base di relatività ristretta	1
1.1.1 Le trasformazioni di Lorentz	1
1.1.2 Cenni di analisi tensoriale	2
1.1.3 Teorema della divergenza e correnti conservate	9
1.2 Cinematica relativistica	10
1.2.1 La quadrirelatività	11
1.2.2 La quadriaccelerazione	11
1.3 Dinamica relativistica	12
1.3.1 La conservazione dell'energia e dell'impulso	12
1.3.2 Urto e decadimento di particelle	15
1.4 Elettromagnetismo relativistico	19
1.4.1 Richiami di elettromagnetismo	19
1.4.2 La formulazione relativistica	20
1.5 Elettrodinamica relativistica	22
1.5.1 La legge di Lorentz	23
1.5.2 L'elettrodinamica	24
1.6 Formulazione lagrangiana	26
1.6.1 Formulazione lagrangiana del moto di una particella libera	27
1.6.2 Formulazione lagrangiana del moto di una carica puntiforme	28
2 L'equazione di Dirac	31
2.1 Lo scontro fra meccanica quantistica e relatività	31
2.1.1 Alcuni concetti base	31
2.1.2 La costruzione di un'equazione relativistica	32
2.1.3 L'equazione di Klein-Gordon	33
2.2 L'equazione di Dirac	34
2.2.1 La costruzione dell'equazione	34
2.2.2 Il limite classico dell'equazione di Dirac	37
2.3 Covarianza dell'equazione di Dirac	40
2.3.1 Le proprietà delle matrici γ^μ	40
2.3.2 La prova della covarianza	41
2.3.3 Proprietà delle trasformazioni degli spinori	46
2.3.4 La quadricorrente	47
2.3.5 Le trasformazioni improprie	48
2.3.6 I covarianti di Dirac	51
2.3.7 Gli operatori di traslazione e rotazione	55
2.4 Le soluzioni di particella libera	59

2.4.1	Gli spinori di particella libera	59
2.4.2	Gli stati ad energia positiva e negativa	61
2.4.3	I proiettori su stati di quadrimpulso e spin definito	64
2.4.4	La costruzione di una soluzione generica	72
2.4.5	Inconsistenze dell'equazione di Dirac	78
2.5	L'interazione col campo elettromagnetico	80
2.5.1	L'interazione minimale	81
2.5.2	La teoria di Dirac dell'antimateria	82
2.5.3	Time reversal (inversione temporale) e altre simmetrie	86
2.6	L'interazione col campo elettromagnetico	90
2.6.1	L'interazione minimale	90
2.6.2	La teoria di Dirac dell'antimateria	92
2.6.3	Time reversal (inversione temporale) e altre simmetrie	95
3	Teoria del propagatore	99
3.1	Il propagatore classico	99
3.1.1	Definizione ed equazioni fondamentali	99
3.1.2	Lo sviluppo perturbativo	101
3.1.3	La trasformata di Fourier del propagatore	103
3.2	Il propagatore in meccanica quantistica relativistica	105
3.2.1	Il propagatore libero per l'equazione di Dirac	105
3.2.2	La prescrizione di Feynmann	107
3.2.3	Le equazioni di propagazione per gli spinori	110
3.2.4	Il propagatore esatto	114
3.3	Problemi di scattering	118
3.3.1	La matrice di scattering	118
4	Teoria dei campi classica.	121
4.1	Introduzione.	121
4.1.1	I campi classici.	121
4.2	La meccanica analitica dei campi.	123
4.2.1	Il formalismo lagrangiano della teoria dei campi.	123
4.2.2	Il teorema della Noeter.	125
4.2.3	L'invarianza per traslazioni e rotazioni.	129
4.2.4	L'invarianza di gauge di prima specie.	131
4.2.5	Il teorema di Belinfante.	132
4.3	I campi <i>classici</i>	135
4.3.1	Il campo elettromagnetico.	135
4.3.2	Il campo di Klein-Gordon.	141
4.3.3	Il campo di Dirac.	142
4.4	Il formalismo hamiltoniano.	142
5	La quantizzazione dei campi.	143
5.1	La procedura della seconda quantizzazione.	143
5.2	Il campo di Klein-Gordon.	143
5.3	Il campo elettromagnetico.	143

Prefazione

Nelle motivazioni in cui si introduce la GNU Free Documentation License (FDL) (reperibili su <http://www.gnu.org/philosophy/free-doc.html>) si dà una grande rilevanza all'importanza di disporre di buoni manuali; questo perché senza un buon manuale le possibilità di usufruire fino in fondo delle capacità di un programma o di un linguaggio vengono notevolmente ridotte, e la mancanza di un manuale libero, finisce per diminuire anche le libertà del software.

Visto però il titolo di questo testo, viene spontaneo chiedersi cosa diamine c'entri la Meccanica Quantistica Relativistica con il software libero. A parte le considerazioni relative all'uso di programmi liberi per il calcolo e le simulazioni in fisica la risposta più immediata è: “un bel niente”. Ma in realtà sia la scienza che il software libero condividono molte metodologie di sviluppo e si basano sugli stessi ideali di condivisione delle conoscenze e di libera circolazione dei saperi. Per questo motivo, se solo si va un po' al di là delle apparenze, si possono notare importanti affinità.

Per questo ritengo che la filosofia che sta alla base del software libero e che ha postato alla FDL si applichi altrettanto bene, se non meglio, anche alla produzione di testi scientifici, che possano essere a disposizione di tutti e crescere con il contributo di tutti. In particolar modo poi a quei testi didattici e formativi che servono a fornire le basi per la comprensione di un argomento. Spesso infatti questi testi sono datati, e per le usuali restrizioni che derivano dall'applicazione delle leggi del diritto d'autore non possono venire aggiornati, non forniscono la possibilità di essere adattati ad esigenze diverse, integrati, ampliati. Si finisce così per riscrivere cento volte le stesse cose, o doversele fare da capo.

Per questo fornire una base di conoscenza che possa essere patrimonio di tutti, ed a cui tutti possano liberamente attingere e contribuire, così che sia possibile accedere anche agli aspetti più complessi di una materia, diventa un requisito essenziale, che non può essere lasciato in balia della fantomatica “proprietà intellettuale” che oggi più che mai invece di proteggere l'autore serve più che altro a proteggere gli interessi economici degli editori, il tutto a scapito delle possibilità delle singole persone di accedere e condividere la conoscenza.

Pertanto ho recuperato alcuni vecchi, ma credo comunque utili, appunti di Meccanica Quantistica Relativistica, che avevo rimesso faticosamente insieme studiando per questo esame quando ancora ero studente universitario. Da questi ho cercato di trarre un testo introduttivo (per uno studente di quello che era, prima della riforma, il quarto anno di un corso di laurea in fisica, non per un profano) che spero possa servire come base perché qualcun altro possa produrre un testo completo in grado di sostituire con profitto i costosissimi, datati e spesso introvabili, libri di testo sull'argomento.

Capitolo 1

La relatività ristretta

1.1 Nozioni base di relatività ristretta

Non staremo qui a ricavare in dettaglio tutte le conseguenze dei due postulati che stanno alla base della relatività ristretta:

- a) equivalenza di tutti i sistemi inerziali nella descrizione dei fenomeni fisici.
- b) costanza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento.

sappiamo però che da essi segue la non validità della meccanica newtoniana ed in particolare l'abbandono del concetto di tempo assoluto ed il passaggio dalle trasformazioni di Galileo a quelle di Lorentz.

1.1.1 Le trasformazioni di Lorentz

Le *trasformazioni di Lorentz*, dette anche *boost* (spinte), possono essere ricavate con considerazioni assolutamente generali partendo dalla sola ipotesi, del resto molto ragionevole, che siano lineari. Infatti dai suddetti postulati e dall'assunzione implicita che lo spazio sia isotropo e omogeneo si può dimostrare che la forma quadratica:

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (1.1)$$

è la stessa in tutti i sistemi di riferimento e dunque deve essere invariante per le *trasformazioni di Lorentz*. Da questo, prendendo il caso particolare di due sistemi S e S' con gli assi orientati nella stessa direzione ed in moto l'uno rispetto all'altro con una velocità v diretta lungo l'asse x , si ottiene, con un po' di conti, che le trasformazioni cercate sono:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad (1.2)$$

queste ci mostrano esplicitamente che i tempi non sono più gli stessi nei due sistemi inerziali. Per questo motivo si introduce uno spazio a quattro dimensioni, detto *spazio di Minkowsky*, le cui coordinate sono definite come:

$$x_0 = ct \quad , \quad x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad (1.3)$$

e chiameremo un punto in tale spazio *evento*, per distinguerlo dai punti nell'ordinario spazio a tre dimensioni. Per snellire la notazione si definiscono le due quantità adimensionali:

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

con queste definizioni possiamo esprimere le trasformazioni di Lorentz come:

$$x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x_0 - \beta x_1) \quad (1.5a)$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x_1 - \beta x_0) \quad (1.5b)$$

$$x'_2 = x_2 \quad (1.5c)$$

$$x'_3 = x_3 \quad (1.5d)$$

che hanno una forma più simmetrica; potremo così esprimere la matrice di trasformazione come:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^\mu_\nu \quad (1.6)$$

Questa formula può essere generalizzata in maniera ancora relativamente semplice nel caso di una direzione generica della velocità (mantenendo gli assi dei sistemi nella stessa direzione), ed il risultato si trova in [Jac]. Le (1.4) che definiscono β e γ comportano che sia $0 \leq \beta \leq 1$ e $1 \leq \gamma \leq \infty$, possiamo definire un nuovo parametro ζ mediante le relazioni:

$$\begin{cases} \beta = \tanh \zeta \\ \gamma = \cosh \zeta \\ \gamma\beta = \sinh \zeta \end{cases} \quad (1.7)$$

e la definizione è coerente se consideriamo che la seconda delle (1.4) è anche la relazione fra $\tanh x$ e $\cosh x$. Con quest'ultima definizione possiamo riscrivere le trasformazioni di Lorentz del caso precedente come:

$$x'_0 = x_0 \cosh \zeta - x_1 \sinh \zeta \quad (1.8a)$$

$$x'_1 = -x_0 \sinh \zeta + x_1 \cosh \zeta \quad (1.8b)$$

e come si vede queste hanno una struttura molto simile ad una rotazione delle coordinate, con delle funzioni iperboliche al posto delle usuali funzioni circolari; questo è dovuto al fatto che lo spazio di Minkowsky non è euclideo. La variabile ζ , che svolge le funzioni di un angolo di rotazione, è chiamata *parametro di spinta* o *rapidità*.

1.1.2 Cenni di analisi tensoriale

Le relazioni (1.1) e (1.2) ci dicono che in relatività ristretta il tempo e la distanza fra due punti non sono più invarianti, ma dipendono dal sistema di riferimento. Questo comporta che non è più possibile utilizzare l'ordinario spazio euclideo a tre dimensioni per esprimere le leggi fisiche, e che si deve rinunciare a trattare separatamente coordinate spaziali e temporali; occorre cioè utilizzare lo spazio di Minkowsky introdotto sommariamente al paragrafo precedente.

Per esprimere le leggi fisiche in maniera indipendente dal sistema di riferimento dovremo eguagliare grandezze dello stesso tipo (scalari, vettori, tensori, ecc.) che trasformano nello stesso modo in un cambiamento di coordinate, così che le relazioni ottenute in un qualunque sistema inerziale resteranno valide in tutti gli altri; per questo ci occorre l'armamentario matematico dell'analisi tensoriale.

Esprimeremo le componenti di un generico vettore dello spazio di Minkowsky con la notazione $a^\mu = (a_0, a_i) = (a_0, \mathbf{a})$, usando indici greci per le componenti in 4 dimensioni e indici romani per le componenti tridimensionali relative alla parte nello spazio ordinario; così il vettore delle

coordinate si potrà scrivere come $x^\mu = (ct, x_i) = (ct, \mathbf{x})$. Useremo anche la notazione matriciale indicando a^μ col vettore colonna delle 4 componenti a_0, a_1, a_2, a_3 . Infine, seguendo la consuetudine dell'analisi tensoriale, adotteremo la *notazione di sommatoria*, per la quale si sottintende una sommatoria su tutti gli indici ripetuti.

Lo spazio di Minkowsky, a differenza dello spazio tridimensionale ordinario, non è euclideo, infatti in esso non è invariante la usuale norma di un vettore, definita come la radice di $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ma la forma (1.1) che viene così a definire la distanza fra due vettori. Siccome la differenza è solo per il segno meno nella prima componente lo spazio viene detto *pseudoeuclideo*.

La (1.1) si può riscrivere in forma infinitesimale come:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (1.9)$$

che si può esprimere in forma più generale:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.10)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore che con questa relazione definisce la distanza fra due punti e viene pertanto chiamato *tensore metrico*.

La (1.10) è una relazione che si può scrivere anche per spazi curvi più generali di quello di Minkowsky; essa ci dice che $g_{\mu\nu}$ è sempre un tensore simmetrico, infatti essendo comunque $dx^\mu dx^\nu = dx^\nu dx^\mu$, ed e potendo chiamare gli indici come si vuole, si ha che:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu = g_{\nu\mu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.11)$$

e dunque $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$. Il confronto fra la (1.9) e la (1.11) ci dà l'espressione esplicita di $g_{\mu\nu}$ che (espresso in forma matriciale) nel caso di spazio di Minkowsky è:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

si noti anche che per lo spazio di Minkowsky $g^2 = I$, cioè $g = g^{-1}$.

Il tensore metrico è quello che permette di definire in maniera generale il prodotto scalare di due vettori dello spazio di Minkowsky; dato che si è usato il tensore metrico esso ovviamente è invariante, e lo si può esprimere con la relazione matriciale come:

$$a \cdot b = a^t g b \quad (= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu) \quad (1.13)$$

(dove con a^t si intende il vettore riga).

Come si può notare abbiamo usato per $g_{\mu\nu}$ gli indici in basso al contrario di quanto fatto con a^μ e b^ν ; questo perché in generale, quando si ha a che fare con spazi non euclidei, si hanno due tipi di vettori.

La distinzione introdotta fra questi due tipi di vettori è dovuta al fatto che, in generale, data una qualunque legge di trasformazione delle coordinate del tipo:

$$x'^\mu = x'^\mu(x_0, x_1, x_2, x_3) = x'^\mu(x^\nu) \quad (1.14)$$

(quindi non necessariamente lineare) si possono sempre avere due diverse proprietà di trasformazione. Allora si dice che un oggetto è un *vettore controvariante*, e si pone l'indice in alto, se esso trasforma secondo la legge:

$$a'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} a^\beta \quad (1.15)$$

e cioè con lo jacobiano delle leggi di trasformazione. Invece si dice che un oggetto è un *vettore covariante*, e si pone l'indice in basso, se esso trasforma secondo la legge:

$$b'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} b_\beta \quad (1.16)$$

e cioè con la matrice inversa dello jacobiano.

L'estensione a tensori (covarianti, controvarianti e misti) di qualunque rango è immediata introducendo altrettante matrici di trasformazione per ciascuno degli indici in gioco; ad esempio per un tensore misto di rango tre, avremo qualcosa del tipo:

$$c'^\mu_{\alpha\gamma} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} c^\nu_{\beta\delta}$$

Da queste definizioni e dalle proprietà di trasformazione dei differenziali delle coordinate, che l'analisi matematica ci dice essere nella forma:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (1.17)$$

si ottiene subito che il differenziale delle coordinate è, in maniera assolutamente generale, ed indipendente dal tipo di spazio, un vettore controvariante. Nel nostro caso poi, avendo a che fare con trasformazioni lineari, la proprietà si estende immediatamente per integrazione anche al vettore delle coordinate.

La (1.10) ci dice anche che $g_{\mu\nu}$ è effettivamente un tensore covariante di rango due, come si può verificare facilmente con un po' di conti a partire dalla (1.17) tenendo conto che ds è invariante.

Col tensore metrico si può poi passare da vettori controvarianti a covarianti e viceversa, secondo le relazioni:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \quad \text{e} \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad (1.18)$$

dove il tensore metrico controvariante si ottiene da $g_{\mu\nu}$ per semplice inversione, dato che la relazione $gg^{-1} = I$, espressa in componenti, non è altro che:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad (\text{con } \delta_\mu^\lambda \text{ delta di Kronecker})$$

Nel nostro caso poi abbiamo visto che $g^2 = I$ e $g = g^{-1}$ per cui si ha anche che $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ e come regola generale si avrà che da $a^\mu = (a_0, \mathbf{a})$ si ottiene un $a_\mu = (a_0, -\mathbf{a})$.

Possiamo ora vedere cosa significa tutto questo avendo a che fare con lo spazio di Minkowsky e con le trasformazioni di Lorentz generiche, di cui la Λ vista in (1.6) è un caso particolare. Scriveremo le leggi di trasformazione come:

$$x' = \Lambda x \quad \text{cioè} \quad x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (1.19)$$

e sappiamo che Λ deve essere una trasformazione lineare e deve conservare la metrica della forma (1.9). Da questo avremo che, per x, y qualunque, dovrà essere:

$$y' \cdot x' = y'^t g x' = y^t g x = y \cdot x$$

che scritta esplicitamente ci dice che:

$$y^t \Lambda^t g \Lambda x = y^t g x$$

dalla quale, essendo x, y qualunque, segue la proprietà generale delle trasformazioni di Lorentz:

$$\Lambda^t g \Lambda = g \quad \text{cioè} \quad g \Lambda = (\Lambda^t)^{-1} g = (\Lambda^{-1})^t g \quad (1.20)$$

che in componenti è:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (1.21)$$

La (1.19) ci dice immediatamente che il vettore delle coordinate, che è controvariante, trasforma con Λ ;¹ dalla (1.20) otteniamo esplicitamente anche le proprietà di trasformazione dei vettori covarianti, infatti se prendiamo gx otteniamo che $(gx)' = g\Lambda x = (\Lambda^{-1})^t(gx)$, quindi un vettore controvariante trasforma secondo $(\Lambda^{-1})^t$; dobbiamo verificare che questa corrisponde alla espressione generale vista prima, calcoliamo:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} (\Lambda^{-1})^\beta_\gamma x'^\gamma = (\Lambda^{-1})^\beta_\gamma \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\alpha} = (\Lambda^{-1})^\beta_\gamma \delta^\gamma_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha$$

e questa non è altro che $((\Lambda^{-1})^t)^\alpha_\beta$ cioè $(\Lambda^{-1})^t$.

La precedente definizione generale dei vettori covarianti e controvarianti ci mostra poi una proprietà generale delle derivate delle coordinate; infatti dall'analisi si sa che le derivate delle coordinate in un cambiamento di variabili trasformano secondo la legge:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (1.22)$$

dunque le derivate delle coordinate (la generalizzazione del ∇) formano un vettore covariante. In realtà la relazione precedente vale in maniera completamente generale solo se le derivate sono applicate ad uno scalare (cioè per il *gradiente*); nel caso di un vettore (o di un tensore) in generale si avrà che:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \right] = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x'^\lambda} + V^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \right] \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + V^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu}$$

e adesso il primo termine è quello giusto, ma si ha anche il secondo (quello che in coordinate curvilinee porta ai cosiddetti *simboli di Christoffel*). Nel nostro caso comunque le trasformazioni sono lineari e quindi le derivate seconde sono nulle ed il secondo pezzo sparisce; l'operazione di derivazione perciò viene effettivamente a costituire, limitandoci alla relatività ristretta, un vettore covariante, non altrettanto accade però in relatività generale.

Adesso possiamo scrivere esplicitamente l'operatore gradiente nello spazio di Minkowsky; ricordando che $x_0 = ct$ si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

e questo trasforma come un vettore covariante. Si può anche ottenere l'analogo controvariante usando il tensore metrico come:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

e per snellire la notazione si usa poi scrivere:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

infine si trova che il modulo di ∂_μ è una vecchia conoscenza infatti si ha:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square$$

¹in generale, per la (1.15), in tutte le trasformazioni lineari il vettore delle coordinate trasforma sempre con la matrice associata alla trasformazione, dato che quest'ultima è anche lo jacobiano.

e questo ci dice il d'alambertiano è uno scalare invariante. Se poi A^μ è un campo vettoriale quadridimensionale si può definire una analogo della divergenza tridimensionale come:

$$\text{div} A^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu$$

ed anche questo è uno scalare invariante.

La (1.20) ci dice anche che $\det g = \det g (\det \Lambda)^2$ da cui segue, poiché $\det g = -1$, che:

$$\det \Lambda = \pm 1$$

esistono quindi due classi di trasformazioni, le *trasformazioni di Lorentz proprie*, continue con l'identità, per cui è necessariamente $\det \Lambda = 1$ e le *trasformazioni di Lorentz improprie*. Per quest'ultime la condizione $\det \Lambda = -1$ è sufficiente, ma non necessaria per via della metrica che non è definita positiva; infatti sono trasformazioni improprie sia $\Lambda = g$, con $\det \Lambda = -1$, che $\Lambda = -\mathbb{I}$ con $\det \Lambda = 1$.

Un'altra proprietà generale delle trasformazioni Λ è il numero di parametri necessari per specificare completamente una matrice del gruppo. In generale le matrici 4×4 hanno 16 componenti, ma noi abbiamo la relazione (1.20), che rappresenta 16 equazioni per gli elementi di Λ . Però, dato che l'equazione è simmetrica per trasposizione, le componenti indipendenti sono solo 10, restano quindi alla fine sei parametri liberi, tre di questi possono essere identificati con i tre angoli di Eulero delle rotazioni spaziali, e gli altri con i parametri (ad esempio le componenti della velocità relativa) associati ai *boost di Lorentz*.

Se usiamo le espressioni viste in §1.1 per le trasformazioni di Lorentz possiamo vedere come trasformano le componenti di un vettore nello spazio di Minkowsky passando da un riferimento inerziale ad un altro; una formula molto utile che da la trasformazione di un qualunque quadrivettore per un boost di Lorentz di velocità $\mathbf{v}$ è:

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \mathbf{A}) \quad (1.23a)$$

$$A'_\parallel = \gamma(A_\parallel + \beta A_0) \quad (1.23b)$$

$$\mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (1.23c)$$

dove $\beta = \mathbf{v}/c$ e gli indici $\parallel$ e $\perp$ indicano le componenti parallela e perpendicolare di $\mathbf{A}$ alla velocità $\mathbf{v}$.

L'analisi tensoriale ci dice che il prodotto scalare di due quadrivettori è invariante, così come la norma di un vettore, ma dato che lo spazio di Minkowsky non è euclideo, essa non è definita positiva. Si introduce allora una distinzione a seconda che sia positiva, negativa o nulla chiamando rispettivamente il vettore di tipo spazio (*space-like*), tempo (*time-like*) o luce (*light-like*). La distinzione si introduce rifacendosi alla distanza quadridimensionale fra due eventi:

$$s_{12} = c(t_1 - t_2)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2$$

se $s_{12} > 0$ infatti è possibile trovare una trasformazione di Lorentz per la quale è $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ (basta prendere $\beta = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|/c(t_1 - t_2)$ ed è ovviamente $\beta < 1$) cioè c'è un sistema inerziale in cui gli eventi avvengono nello stesso punto in tempi diversi. Viceversa se $s_{12} < 0$ si può trovare una trasformazione di Lorentz per cui è $t_1 = t_2$, cioè c'è un sistema inerziale in cui gli eventi sono simultanei.

Nonostante le loro semplici proprietà di trasformazione, i tensori non sono le sole quantità interessanti; ad esempio una quantità che non è un tensore ma che è molto importante è l'elemento di volume (quadridimensionale). Un teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice infatti che esso si trasforma secondo la legge:

$$d^4 x' = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| d^4 x$$

cioè col determinante dello jacobiano della trasformazione. Nel nostro caso le trasformazioni sono lineari e date da Λ , per cui avremo che $d^4x' = \det \Lambda d^4x = \pm d^4x$. Per questa proprietà l'elemento di volume è detto anche *pseudoscalare*.

Un'altra quantità che ha un comportamento simile è il determinante della metrica:

$$g = -\det g_{\mu\nu}$$

la legge di trasformazione di $g_{\mu\nu}$ ci dice che:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}$$

da cui segue, per la proprietà del determinante per cui $\det AB = \det A \det B$, che:

$$g' = \left\| \frac{\partial x}{\partial x'} \right\|^2 g = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\|^{-2} g \quad (1.24)$$

in questo caso la matrice trasforma con l'inverso del quadrato del determinante dello jacobiano. In uno spazio di Minkowsky allora, dato che $\det \Lambda = \pm 1$, g è invariante.

Quantità come l'elemento di volume o g , che trasformano acquisendo fattori del determinante jacobiano, sono dette *densità scalari*. Allo stesso modo quantità che trasformano come tensori con l'aggiunta di fattori del determinante jacobiano sono dette *densità tensoriali*; il numero di fattori di $\|\partial x'/\partial x\|$ è chiamato *peso della densità*; nel nostro caso g è una densità scalare di peso -2 .

In generale una densità tensoriale di peso n trasformerà con la legge:

$$\mathcal{A}'^\nu_\mu = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\|^n \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \mathcal{A}^\sigma_\rho$$

che può essere riscritta, facendo ricorso alla (1.24), anche come:

$$g'^{n/2} \mathcal{A}'^\nu_\mu = g^{n/2} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \mathcal{A}^\sigma_\rho$$

Infine si può notare che moltiplicando due densità di peso opposto si ottiene una quantità scalare; ad esempio se prendiamo $\sqrt{g}d^4x$ abbiamo uno scalare invariante.

Una quantità di fondamentale importanza è il *tensore di Ricci* (chiamato anche *tensore di Levi-Civita*), definito come:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3 \text{ e per ogni altra permutazione pari} \\ -1 & \text{per ogni permutazione dispari dei precedenti valori} \\ 0 & \text{se gli indici non sono tutti diversi} \end{cases} \quad (1.25)$$

(si noti che è analogo al tensore di Ricci tridimensionale ϵ_{ijk} con cui nello spazio euclideo si definiscono i prodotti vettoriali come $C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$).

Il tensore di Ricci è un tensore molto particolare, infatti in uno spazio di dimensione quattro le matrici di rango 4 completamente antisimmetriche hanno una sola componente indipendente (costituiscono cioè uno spazio monodimensionale), quindi $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è una base per tale spazio.

Per capire bene con cosa si ha a che fare però dobbiamo studiarne le proprietà di trasformazione; allora consideriamo l'espressione:

$$A^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

se scambiamo tra loro due indici qualsiasi (ad esempio μ e ν) avremo:

$$A^{\nu\mu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

e questa, per l'antisimmetria di $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ci da:

$$A^{\nu\mu\rho\sigma} = -\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}$$

ma gli indici α e β sono *muti* (cioè sono indici contratti su cui si somma) per cui li si possono chiamare come si vuole, per cui si ottiene:

$$A^{\nu\mu\rho\sigma} = -\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -A^{\mu\nu\rho\sigma}$$

il ragionamento si può applicare a qualsiasi altra coppia di indici, dunque $A^{\mu\nu\rho\sigma}$ è una quantità completamente antisimmetrica negli indici $\mu\nu\rho\sigma$, quindi per quanto detto prima deve essere proporzionale a $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Per determinare la costante di proporzionalità basta prendere un elemento qualunque del tensore, allora se come valori per gli indici $\mu\nu\rho\sigma$ prendiamo la sequenza di riferimento ¹²³⁴ e sviluppiamo le somme, e quello che si ottiene non è altro che la definizione del determinante di $\partial x'^\mu/\partial x^\alpha$, quindi si ha la relazione fondamentale:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.26)$$

e questa ci dice che il tensore di Ricci è una densità tensoriale di peso -1 , che si può trasformare in un tensore ordinario moltiplicandolo per $1/\sqrt{g}$.

Da $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ si può ricavare subito anche $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ essendo:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

e al solito questo è completamente antisimmetrico e quindi proporzionale a $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e con lo stesso procedimento di prima si ha che la costante di proporzionalità è $-g = \det g_{\mu\nu}$, dunque:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -g \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.27)$$

Queste relazioni si semplificano immediatamente nel caso della relatività ristretta; in tal caso infatti le trasformazioni sono lineari e $g = 1$ per cui la (1.26) diventa:

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.28)$$

mentre la (1.27) diventa $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Un'altra relazione utile poi è $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 4!$.

Il tensore di Ricci è importante perché come l'equivalente tridimensionale ϵ_{ijk} è quello che permette di definire gli analoghi del prodotto vettoriale e del rotore anche in uno spazio a quattro dimensioni, dove le cose sono ovviamente diverse, dato che in questo caso le matrici antisimmetriche non hanno, come nello spazio tridimensionale, tre componenti indipendenti assimilabili a quelle di un vettore, ma sei.

L'analogo del prodotto vettoriale di due quadrivettori allora non è più un quadrivettore ma il tensore antisimmetrico di rango due definito dalla relazione:

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$$

si può poi definire il *duale* (o coniugato) di un tensore doppio come:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = *T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \quad (1.29)$$

dal quale si definisce il rotore (sempre di un tensore doppio) come:

$$(\text{rot}T_{\alpha\beta}) = (\text{rot}T_{\alpha\beta})^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu T_{\alpha\beta} = \partial_\nu^* T^{\mu\nu} \quad (1.30)$$

che è appunto un quadrivettore, e come si può notare questa definizione è assolutamente identica a quella data in tre dimensioni per cui $(\text{rot}A)_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_j A_k$.

Facendo i conti si può poi facilmente verificare che la (1.30) può essere riscritta anche come:

$$(\text{rot}T)^\mu = \partial_\alpha T_{\beta\gamma} + \partial_\gamma T_{\alpha\beta} + \partial_\beta T_{\gamma\alpha}$$

dove deve essere $\mu \neq \alpha \neq \beta \neq \gamma$.

1.1.3 Teorema della divergenza e correnti conservate

Vogliamo infine dimostrare un utile teorema, conseguenza diretta del teorema della divergenza; sia A^μ un vettore a divergenza nulla; cioè:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (1.31)$$

e tale che $A^\mu \rightarrow 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$; il teorema afferma che in tal caso la quantità:

$$\int A^0 d^3x = \int A^0 dV$$

è uno scalare costante nel tempo.

La dimostrazione si fa col teorema di Gauss, che in uno spazio di Minkowsky, può essere espresso come:

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \int_\Sigma A^\mu \eta_\mu(x) d\sigma(x) \quad (1.32)$$

dove Ω è un volume quadridimensionale qualsiasi e Σ è la superficie che lo racchiude (che è uno spazio a tre dimensioni).

Adesso prendiamo come ipervolume Ω quello compreso fra due ipersuperfici a $x_0 = t$ costante e pari a t_1 e t_2 (vedi 1.1), per tali superfici, con la convenzione di normale esterna si ha:

$$\eta_1^\mu = (1, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad \eta_2^\mu = (-1, \mathbf{0})$$

(e si noti che i corrispondenti versori covarianti sono uguali a questi perché la parte spaziale è nulla), mentre $d\sigma(x) = dV$ e l'integrale su Σ si estende a tutto lo spazio ordinario; così la (1.32) ci da:

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \int A^0(t_2) dV - \int A^0(t_1) dV$$

dato che l'integrale sulla parte all'infinito che chiude le due ipersuperfici a t_1 e t_2 si annulla poiché $A^\mu \rightarrow 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Adesso il primo termine di questa è a sua volta nullo per la (1.31), e quindi alla fine si ottiene che:

$$\int_{t_1}^{t_2} A^0 dV = \int_{t_2}^{t_1} A^0 dV$$

e fata l'arbitrarietà di t_1 e t_2 questo integrale è lo stesso a qualunque tempo lo si calcoli.

Ma se consideriamo una qualunque trasformazione di Lorentz applicata a questo integrale, tutto quello che essa potrà variare, dato che la dipendenza dalle coordinate spaziali sparisce integrando su tutto lo spazio, è il valore del tempo, ma abbiamo appena visto che il valore dell'integrale è sempre lo stesso quindi, come volevasi dimostrare, abbiamo un invariante.

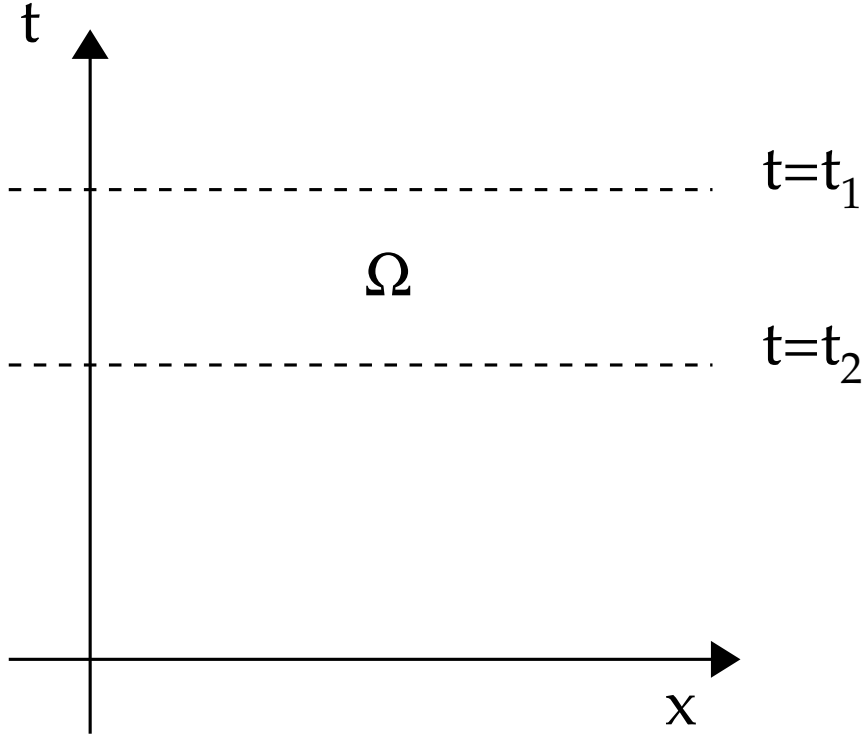


Figura 1.1: Proiezione sugli assi t e x delle due quadrisuperfici a t costante e pari a t_1 e t_2 .

Il risultato dimostrato per un quadrivettore si può generalizzare in maniera semplice nel caso di divergenze nulle di tensori di qualunque ordine; consideriamo ad esempio che sia:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.33)$$

in tal caso otterremo che la quantità conservata è il quadrivettore:

$$p^\mu = \int T^{0\mu} dV$$

Questo lo possiamo dimostrare sfruttando il risultato precedente; prendiamo un qualunque quadrivettore costante c_ν e definiamo $B^\mu = c_\nu T^{\mu\nu}$, dalla (1.33) si ottiene subito che:

$$\frac{\partial B^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (c_\nu T^{\mu\nu}) = c_\nu \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$$

per cui per quanto visto prima:

$$\int_{t_1} B^0 dV = c_\nu \int T^{0\nu} dV$$

è un invariante, quindi per le proprietà di trasformazione di c_ν si ottiene quanto volevamo. Si noti anche che, dato che c_ν è un quadrivettore costante, deve esserlo pure p^μ . L'estensione ad ordini superiori è identica.

1.2 Cinematica relativistica

Il punto di partenza della cinematica relativistica sono le coordinate di un evento $x^\mu = (x_0, x_i) = (ct, \mathbf{r})$ che sappiamo essere un vettore controvariante; per ottenere la cinematica relativistica ci occorre definire gli analoghi della velocità e dell'accelerazione.

1.2.1 La quadrivelocità

Non si può definire la velocità come dx^μ/dt perché dt non è invariante, e questo non sarebbe un quadrivettore; dobbiamo seguire allora un'altra strada. Conosciamo però un invariante fondamentale che è l'elemento di linea:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

per cui è possibile definire un quadrivettore:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

ma questa non ha le dimensioni giuste; notiamo allora che:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

da cui segue immediatamente che:

$$ds = c dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

e da questa si vede subito, dato che ds e c sono invarianti, che se definiamo:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma} dt \quad (1.34)$$

si ottiene un invariante con le dimensioni di un tempo. Più precisamente si può notare che questo è il tempo che segna l'orologio solidale con una particella in moto (nel sistema solidale $v = 0$ e quindi $d\tau = dt$) ed è per questo chiamato *tempo proprio*.

Si noti che in un qualsiasi sistema di riferimento S un certo intervallo di tempo proprio $t_2 - t_1$ verrà misurato integrando l'inversa della (1.34), cioè sarà:

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta(\tau)}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(\tau) d\tau$$

e questa ci mostra l'effetto noto come *dilatazione del tempo*, infatti per una particella in moto a velocità costante si ha la relazione $t = \gamma\tau$.

Con il tempo proprio possiamo definire un quadrivettore con le dimensioni corrispondenti a quelle di una velocità, che chiameremo appunto *quadrivelocità*:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (= cu^\mu) \quad (1.35)$$

e se usiamo la (1.34) otteniamo subito che:

$$v^\mu = \left(\frac{cdt}{dt\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{d\mathbf{r}}{dt\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (1.36)$$

e si vede subito che, contrariamente a $d\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ non è la parte spaziale di un quadrivettore, mentre lo è $\gamma \mathbf{v}$, per cui non è affatto immediata l'identificazione di v^μ come una velocità ordinaria.

1.2.2 La quadriaccelerazione

Seguendo questa falsariga è immediato definire la *quadriaccelerazione* come:

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (1.37)$$

solo che adesso quando si va a derivare si deve tener presente che anche γ dipende da v e quindi da t ; per questo è opportuno calcolarsi preventivamente:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \frac{d}{dt}(\beta^2)$$

e dalle definizioni di γ e β si ottiene:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{c^2} \gamma^3 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

da cui, usando ancora le definizioni e ricordando che $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$, si ottiene:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{c^2} \gamma^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{c^2 - v^2} \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \quad (1.38)$$

per cui alla fine si ottiene:

$$a^\mu = \left(\gamma \frac{d}{dt}(\gamma c), \gamma \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) \right) = \left(c \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \left[\frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a} \right] \right) \quad (1.39)$$

da cui usando la (1.38) si ottiene:

$$a^\mu = \left(\frac{c}{c^2 - v^2} \gamma^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \frac{1}{c^2 - v^2} \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \right) \quad (1.40)$$

che a questo punto ha perso ogni relazione immediata con l'analogo classico.

1.3 Dinamica relativistica

Con le relazioni precedenti abbiamo introdotto la nozioni di base della cinematica relativistica; il problema è ora quello di costruire la dinamica. Qui le cose si possono fare in molti modi, il primo, molto immediato, è quello di definire un analogo della legge di Newton introducendo la *forza di Minkowsky*:

$$f^\mu = m_0 a^\mu$$

dove m_0 è la *massa di riposo* della particella, cioè la massa misurata nel sistema solidale, che è ovviamente un invariante. Anche se facendo i conti si può dimostrare che per $v \ll c$ questa si riduce a $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, questo metodo non è molto utile, in quanto le espressioni di f^μ e a^μ non hanno alcun riferimento immediato con gli analoghi classici, e si perdono parecchie informazioni interessanti.

Per questo motivo cercheremo di esprimere la dinamica relativistica attraverso l'analogia con un'altra formula classica, quella che esprime la forza tramite la quantità di moto come:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.41)$$

che è molto più utile di $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ in quanto resta valida anche per la meccanica relativistica.

1.3.1 La conservazione dell'energia e dell'impulso

Inoltre ci interessa ottenere la conservazione dell'energia e della quantità di moto che sono leggi generali che devono restare valide anche in relatività ristretta; per farlo cominciamo col definire come *quadrimpulso* il quadrivettore:

$$p^\mu = m_0 v^\mu = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \mathbf{v}) \quad (1.42)$$

col quale possiamo esprimere l'analogia relativistica della (1.41) come:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (1.43)$$

e questa è perfettamente equivalente alla precedente $f^\mu = m_0 a^\mu$.

Adesso si tratta di capire quali sono le caratteristiche di p^μ , e dato che vogliamo ottenere la conservazione della quantità di moto (che è una legge che deve essere valida in tutti i sistemi di riferimento) la conservazione di tale quadrivettore sarebbe l'ideale; vedremo poi che essa comporta, al limite di $v \ll c$, anche la conservazione dell'energia cinetica classica.

Se come legge di conservazione imponiamo che sia $\sum p^\mu = \text{cost.}$ questo significa che tutte le componenti del quadrivettore si conservano; allora per le componenti spaziali quello che si conserva è:

$$\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e questa al limite classico ci dà la legge di conservazione della quantità di moto; se però vogliamo che la legge sia valida anche a livello relativistico dovremo porre:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.44)$$

cioché si può ancora definire la quantità di moto come $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, solo che in questo caso la massa non è più un invariante ma dipende dalla velocità rispetto al particolare sistema di riferimento usato.

Abbiamo visto cosa sono le componenti spaziali del quadrimpulso, che possiamo identificare con una quantità di moto; diventa così logico usare per la forza in tre dimensioni $\mathbf{f}$ la definizione riportata in (1.41) che resterà valida in tutti i sistemi inerziali, anche se in generale $\mathbf{f}$ sarà diversa al cambiare del sistema di riferimento e non potrà essere identificata con la parte spaziale di un quadrivettore.

Resta da interpretare la componente temporale p_0 , ed inoltre dobbiamo chiarire la relazione fra il quadrimpulso e la forza espressa con la (1.43), pertanto proviamo a calcolare la derivata:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 c \frac{d\gamma}{dt} \quad (1.45)$$

per esprimere questa occorre vedere cos'è:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \mathbf{v})$$

ma, a parte il fattore m_0 , questa espressione l'abbiamo già ottenuta nel calcolo per il passaggio della (1.39) alla (1.40); allora usando quell'espressione e moltiplicando tutto per $\mathbf{v}$ otterremo che:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \left[v^2 \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]$$

ed usando la (1.38) si ottiene:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \left[\frac{v^2}{c^2 - v^2} \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] = m_0 \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \left[\frac{c^2}{c^2 - v^2} \right]$$

da cui segue, sempre per la (1.38), che:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} \quad (1.46)$$

questa relazione è estremamente utile giacché ci permette di esprimere la (1.45) come:

$$\frac{dp_0}{dt} = m_0 c \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

che ci dice subito, avendo definito $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$, che:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \frac{W}{c}$$

dove W è, come nella meccanica classica, la potenza; otteniamo così per la componente temporale del quadrimpulso l'identificazione:

$$p_0 = \frac{E}{c}$$

e allora, se usiamo questa definizione, possiamo avere la conservazione dell'energia tramite la conservazione della componente temporale del quadrimpulso. Questo però comporta che l'espressione relativistica dell'energia di una particella è diversa da quella classica: dalla definizione di p^μ otteniamo una formula abbastanza famosa:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 c^2 = m c^2 \quad (1.47)$$

che sviluppata per $v \ll c$ ci da:

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

che è l'espressione classica solo che in più troviamo che c'è una energia di riposo (che classicamente era una costante arbitraria posta sempre a zero) caratteristica di ogni particella e legata alla sua massa secondo la arcinota relazione di Einstein.

Infine ritorniamo all'espressione esplicita per la *forza di Minkowsky* definita in (1.43), che per quanto trovato sopra può essere scritta come:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \left(\gamma \frac{W}{c}, \gamma \mathbf{f} \right) \quad (1.48)$$

Si noti che in realtà qui ci si è limitati a esprimere la conservazione dell'energia e della quantità di moto tramite la conservazione del quadrimpulso, facendo vedere come da questa al limite classico si riottengano le precedenti, in modo da avere, con un'analogia, le espressioni per l'energia e l'impulso relativistiche; abbiamo così ottenuto le formule giuste. Non abbiamo però dimostrato effettivamente che sono necessariamente queste.

In realtà le espressioni relativistiche dell'energia e della quantità di moto si possono ottenere rigorosamente in altri modi; uno di questi, molto formale, utilizza di un impianto analogo a quello della meccanica analitica, costruendo una lagrangiana da cui derivare le equazioni del moto tramite il principio di minima azione; un altro ricorre invece ai due principi fondamentali della conservazione dell'energia e dell'impulso dai quali (per il procedimento vedi [Jac]) si possono ricavare dette espressioni in via del tutto generale con argomenti di carattere teorico, (basandosi sui postulati ed usando considerazioni sull'urto elastico di due particelle identiche), imponendo la condizione che esse si riducano alle usuali per $v \ll c$.

Infine è di notevole interesse il modulo del quadrimpulso, da quanto ottenuto sappiamo che possiamo esprimere quest'ultimo come:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \mathbf{v}) \quad (1.49)$$

da cui si ottiene che il modulo è:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2$$

ma questo è un invariante, per cui possiamo valutarlo in un qualsiasi sistema di riferimento, allora possiamo andare nel sistema solidale, dove $p^\mu = (m_0 c, \mathbf{0})$ per cui si ha che $p^2 = m_0^2 c^2$ e dalla precedente si ottiene la formula fondamentale:

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (1.50)$$

detta *relazione di Einstein*, che è l'equivalente relativistico della relazione classica $E = p^2/2m$. Dalla quantità di moto di una particella si può poi ricavare la sua velocità; infatti dall'espressione (1.49) si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}$$

Il quadrimpulso p^μ ci dà una descrizione completa della cinematica di una particella; quindi l'assegnazione della massa di una particella e della sua velocità $\mathbf{v}$ (o dell'impulso $\mathbf{p}$) in un qualsiasi sistema di riferimento ci permette di determinarne le proprietà cinematiche; negli esperimenti con acceleratori però diventa più conveniente usare come variabili cinematiche le due componenti di $\mathbf{p}$ perpendicolari all'asse z (preso lungo la direzione del fascio) che indicheremo con $\mathbf{p}_\perp$ e la rapidità ζ definita dalle (1.7).

Se in un riferimento S una particella ha impulso $\mathbf{p}$ con impulso trasversale $\mathbf{p}_\perp$ e una componente lungo z pari a $p_\parallel$ esiste una unica trasformazione di Lorentz lungo l'asse z che porta ad un riferimento S' in cui $p_\parallel$ è nulla. Allora in S' l'impulso e l'energia della particella saranno:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_\perp \quad , \quad \frac{E'}{c} = \Omega = \sqrt{p_\perp^2 + m^2 c^2}$$

Nota poi la rapidità ζ di questa trasformazione, partendo dalle precedenti componenti del quadrimpulso in S' possiamo trovare quelle in S usando le proprietà generali di trasformazione dei quadrivettori date dalla (1.23), usando le espressioni di γ e β in termini di ζ . E' banale verificare che si può scrivere il quadrimpulso in S come:

$$\frac{E}{c} = \Omega \cosh \zeta \quad , \quad \mathbf{p}_\perp \quad , \quad p_\parallel = \Omega \sinh \zeta$$

ed $\Omega/c = m_\perp$ viene talvolta chiamata *massa trasversale* o *massa longitudinale*. Quindi in generale potremo scriverci l'energia e l'impulso di una particella come:

$$p^\mu = (m_\perp \cosh \zeta, p_x, p_y, m_\perp \sinh \zeta)$$

Il vantaggio di usare $\mathbf{p}_\perp$ e ζ è che una trasformazione di Lorentz lungo z cambia le rapidità di un termine costante da ζ a $\zeta - Z$ dove Z è la rapidità della trasformazione, e così la configurazione cinematica delle particelle nel sistema del laboratorio differisce da quella nel centro di massa per un banale spostamento dello zero.

1.3.2 Urto e decadimento di particelle

Dalle precedenti relazioni cinematiche e dal principio di conservazione dell'energia-impulso (cioè di p^μ) si possono ricavare delle caratteristiche generali della dinamica delle particelle (in particolare nei casi di urto e decadimento) anche se non è noto il tipo di interazione.

Per snellire la scrittura delle equazioni per il seguito di questo paragrafo useremo le cosiddette *unità naturali*, cioè misureremo tutto in termini di velocità della luce per cui nelle formule sarà

$c = 1$; il quadrimpulso diventerà $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ e la relazione di Einstein (1.50) si potrà semplificare in $E^2 = p^2 + m^2$.

Cominciamo con il caso generale di urto di due particelle: non ci interessa la dinamica dell'urto, consideriamo solo due particelle incidenti di quadrimpulso $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ e $p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$ e masse m_1 e m_2 e due particelle diffuse di impulso $p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3)$ e $p_4 = (E_4, \mathbf{p}_4)$ e masse m_3 e m_4 e in generale sarà $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4$.

La conservazione del quadrimpulso, che è una legge assolutamente generale, ci dice che in ogni caso dovrà essere:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (1.51)$$

con questa relazione si possono definire le tre *variabili invarianti di Mandelstam*:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (1.52a)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \quad (1.52b)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad (1.52c)$$

che sono molto utili. Questa definizione ci mostra che s , t e u non sono indipendenti, infatti consideriamo che:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 + p_4)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 + p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 + p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 \\ &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) + 2(p_1(p_2 + p_4) - p_1 p_3) \end{aligned}$$

e usando la (1.51) si ottiene:

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (1.53)$$

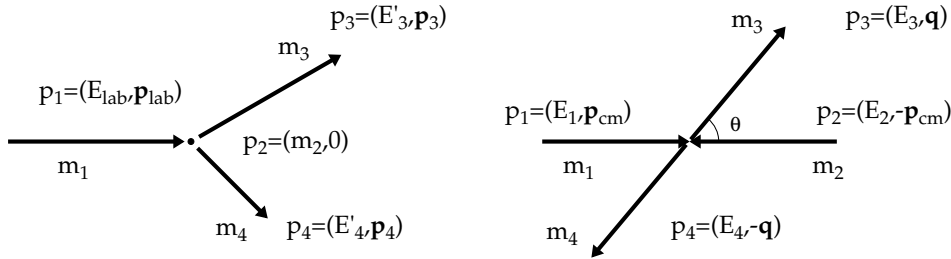


Figura 1.2: Urto relativistico di due particelle, a sinistra sono mostrate le quantità nel sistema di laboratorio, a destra nel sistema del centro di massa.

Sono di particolare importanza nei calcoli relativistici due sistemi di riferimento particolari: quello del laboratorio (in cui si suppone il bersaglio fermo), nel quale vale $p_1 = (E_{\text{lab}}, \mathbf{p}_{\text{lab}})$, $p_2 = (m_2, 0)$ e quello del centro di massa, in cui vale $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_{\text{cm}})$ e $p_2 = (E_2, -\mathbf{p}_{\text{cm}})$ ed anche, per la conservazione del quadrimpulso, $p_3 = (E_1, \mathbf{q})$ e $p_4 = (E_1, -\mathbf{q})$ (vedi fig. 1.2).

La definizione precedente ci mostra subito che $\sqrt{s}$ è l'energia totale nel sistema del baricentro, dato che in esso è banalmente $p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, 0)$; questa è molto importante, perché è l'energia disponibile per le reazioni; nel caso che si abbia a che fare con urti di un fascio su un bersaglio questa si può esprimere in termini dell'energia della particella incidente (cioè nel sistema di laboratorio); si ha infatti che:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = |(E_{\text{lab}} + m_2, \mathbf{p}_{\text{lab}})|^2 = E_{\text{lab}}^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{\text{lab}} - p_{\text{lab}}^2$$

ma evidentemente $E_{\text{lab}}^2 - p_{\text{lab}}^2 = m_1^2$ per cui in definitiva si ottiene che:

$$E_{\text{cm}} = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{\text{lab}}} \quad (1.54)$$

e questa ci dice che al crescere dell'energia del fascio l'energia disponibile nel centro di massa sale solo con la radice quadrata.

Un'altra relazione importante è quella che lega $\mathbf{p}_{\text{lab}}$ a $\mathbf{p}_{\text{cm}}$; per ottenerla consideriamo che siccome il prodotto scalare è invariante si ha:

$$p_1 \cdot p_2 = m_2 E_{\text{lab}} = E_1 E_2 + p_{\text{cm}}^2 \quad (1.55)$$

ma si ha anche:

$$E_1^2 = p_{\text{cm}}^2 + m_1^2 \quad \text{e} \quad E_2^2 = p_{\text{cm}}^2 + m_2^2$$

per cui:

$$E_1^2 E_2^2 = (p_{\text{cm}}^2 + m_1^2)(p_{\text{cm}}^2 + m_2^2)$$

allora quadrando la (1.55) dopo aver portato p_{cm}^2 a primo membro, si ottiene che:

$$(m_2 E_{\text{lab}} - p_{\text{cm}}^2)^2 = (p_{\text{cm}}^2 + m_1^2)(p_{\text{cm}}^2 + m_2^2)$$

che sviluppata da:

$$p_{\text{cm}}^4 + m_2^2 E_{\text{lab}}^2 - 2m_2 E_{\text{lab}} p_{\text{cm}}^2 = p_{\text{cm}}^4 + m_1^2 m_2^2 + p_{\text{cm}}^2 (m_1^2 + m_2^2)$$

e p_{cm}^4 se ne va e questa diventa:

$$m_2^2 E_{\text{lab}}^2 - m_1^2 m_2^2 = p_{\text{cm}}^2 (m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{\text{lab}})$$

che per la (1.54) si identifica immediatamente in:

$$m_2^2 p_{\text{lab}}^2 = p_{\text{cm}}^2 s$$

dunque alla fine si ottiene:

$$\mathbf{p}_{\text{cm}} = \frac{m_2 \mathbf{p}_{\text{lab}}}{\sqrt{s}} = \frac{m_2 \mathbf{p}_{\text{lab}}}{E_{\text{cm}}} \quad (1.56)$$

Un caso particolare di grande interesse è poi quello dell'urto elastico, in cui cioè le particelle restano le stesse prima e dopo l'urto; si ha cioè che $m_1 = m_3$ e $m_2 = m_4$ e dunque $p_3^2 = m_1^2$ e $p_4^2 = m_2^2$.

La prima relazione interessante si ha quando si va a calcolare l'energia cinetica trasferita (cioè l'energia cinetica trasferita a m_2 nell'urto) che nel sistema del laboratorio è data banalmente da $\Delta E = E_4 - m_2$; per farlo basta calcolare il valore della variabile di Mandelstam t nel sistema del laboratorio, che con le notazioni adottate è:

$$t = p_4^2 + p_2^2 - 2p_2 p_4 = m_2^2 + m_2^2 - 2m_2 E_4' = 2m_2 (m_2 - E_4') = -2m_2 \Delta E$$

dunque si ottiene immediatamente che per gli urti elastici:

$$\Delta E = -\frac{t}{2m_2} \quad (1.57)$$

Una relazione fondamentale valida per gli urti elastici è che deve essere $p = q$; in un urto elastico cioè l'impulso nel sistema di laboratorio può solo cambiare direzione; questa si dimostra partendo dal fatto che, per come lo abbiamo definito, in un urto elastico si ha:

$$m_1^2 = E_1^2 - p^2 = E_3^2 - q^2 \quad (1.58a)$$

$$m_2^2 = E_2^2 - p^2 = E_4^2 - q^2 \quad (1.58b)$$

da queste, se moltiplichiamo il primo membro della prima col secondo della seconda e il primo della seconda col secondo della prima otteniamo che:

$$E_1^2 E_4^2 - p^2 E_4^2 - q^2 E_1^2 + p^2 q^2 = E_2^2 E_3^2 - p^2 E_3^2 - q^2 E_2^2 + p^2 q^2$$

da cui semplificando $p^2 q^2$ e raccogliendo si ha:

$$E_1^2 E_4^2 + p^2 (E_3^2 - E_4^2) = E_2^2 E_3^2 + q^2 (E_1^2 - E_2^2) \quad (1.59)$$

se poi calcoliamo u otteniamo che:

$$u = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 = p_2^2 + p_3^2 - 2p_3 p_2$$

che banalmente diventa:

$$p_1 p_4 = E_1 E_4 + p q \cos \theta = p_2 p_3 = E_2 E_3 + p q \cos \theta$$

(dove θ è l'angolo fra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ nel sistema del centro di massa) per cui in definitiva si ha che:

$$E_1 E_4 = E_2 E_3 \quad (1.60)$$

allora si vede subito che nella (1.59) i primi termini di entrambi i membri si semplificano e resta:

$$p^2 (E_3^2 - E_4^2) = q^2 (E_1^2 - E_2^2) \quad (1.61)$$

adesso però consideriamo che dalla conservazione dell'energia segue che $E_1 - E_4 = E_3 - E_2$; questa al quadrato ci da:

$$E_1^2 + E_4^2 - 2E_1 E_4 = E_2^2 + E_3^2 - 2E_2 E_3$$

che usando ancora la (1.60) si semplifica in:

$$E_1^2 + E_4^2 = E_2^2 + E_3^2 \quad \text{cioè} \quad E_3^2 - E_4^2 = E_1^2 - E_2^2$$

che sostituita nella (1.61) ci permette di ottenere alla fine $p^2 = q^2$ e cioè quanto volevamo.

A questo punto se usiamo la (1.57) possiamo trovare un'altra espressione più utile per ΔE ; infatti se ci calcoliamo t nel sistema del centro di massa otteniamo che:

$$\Delta E = -\frac{1}{2m_2} [m_1^2 + m_1^2 - 2(E_1 E_3 - p q \cos \theta)]$$

ma per quanto abbiamo visto $p = q$ e quindi anche $E_1 = E_3$; dunque questa si può riscrivere come:

$$\Delta E = -\frac{1}{2m_2} [2m_1^2 - 2(E_1^2 - p^2 \cos \theta)] = -\frac{1}{2m_2} [2m_1^2 - 2(m_1^2 + p^2 - p^2 \cos \theta)]$$

e quindi alla fine si ha:

$$\Delta E = \frac{p^2 (1 - \cos \theta)}{m_2} \quad (1.62)$$

e se usiamo (1.56), considerando che in questo caso si ha che $p = p_{\text{cm}}$, otteniamo che:

$$\Delta E = \frac{m_2 p_{\text{lab}}^2 (1 - \cos \theta)}{s} = \frac{m_2 p_{\text{lab}}^2 (1 - \cos \theta)}{E_{\text{tot}}^2}$$

che è particolarmente utile perché permette di trovare il massimo dell'energia cinetica trasferibile in un urto elastico come:

$$\Delta E_{\text{max}} = \frac{2m_2 p_{\text{lab}}^2}{E_{\text{tot}}^2} \quad (1.63)$$

1.4 Elettromagnetismo relativistico

La teoria della relatività è strettamente connessa all'elettromagnetismo, il postulato della costanza della velocità della luce infatti non è altro che un modo per affermare che le leggi dell'elettromagnetismo sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

1.4.1 Richiami di elettromagnetismo

Ricordiamo che le leggi dell'elettromagnetismo classico sono espresse tramite le equazioni di Maxwell che, scritte con le unità di misura del sistema di Gauss, sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.64a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.64b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.64c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.64d)$$

a queste va aggiunta la legge di conservazione della carica elettrica che si esprime tramite l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.65)$$

Le equazioni di Maxwell determinano completamente i campi, giacché ogni campo vettoriale può essere scomposto univocamente in una parte irrotazionale ed una solenoidale, e assegnando divergenza e rotore esso risulta univocamente determinato. Si noti anche che queste sono otto equazioni scalari per sei componenti incognite dei vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$.

Il metodo usuale di risolvere le equazioni di Maxwell è passare ai potenziali; in particolar modo dalla prima e dalla terza si ottiene che:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.66a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.66b)$$

questi potenziali però non sono determinati univocamente assegnati i campi, poiché dalle precedenti è evidente che se facciamo una *trasformazione di gauge*:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi \quad (1.67a)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (1.67b)$$

con ψ funzione qualunque i campi restano immutati; per questo si usa imporre una restrizione sui possibili potenziali imponendo una *condizione di gauge*; la più usuale è la *gauge di Lorentz*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.68)$$

con questa relazione, sostituendoli nelle altre due equazioni di Maxwell, si possono ottenere le equazioni per i potenziali:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 4\pi\rho \quad (1.69a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.69b)$$

che nel caso di assenza di sorgenti si riducono alle note equazioni delle onde della meccanica classica.

1.4.2 La formulazione relativistica

Vediamo ora come formulare l'elettromagnetismo col formalismo relativistico; abbiamo detto che il secondo postulato (cioè la costanza della velocità della luce) è equivalente a dire che le equazioni di Maxwell devono essere valide in tutti i sistemi inerziali: questo è il primo dato da cui partire per esprimerle col formalismo dello spazio di Minkowsky.

L'altro dato è la conservazione della carica, legge anch'essa valida in tutti i sistemi di riferimento; ma la fisica ci dice di più, gli esperimenti mostrano infatti che la carica è quantizzata in multipli interi della carica elementare del protone, e che non si osserva nessuna variazione della medesima con la velocità; questo significa non solo che la carica si conserva (così come l'energia), ma anche che essa è invariante, resta cioè uguale in tutti i sistemi inerziali.

Se partiamo da quest'ultima considerazione otteniamo allora che la densità di carica che compare nelle equazioni di Maxwell non può essere invariante, essa infatti è definita dalla relazione $dq = \rho dV$ e l'elemento di volume dV non è invariante; lo è invece² d^4x , che possiamo scrivere come:

$$d^4x = c dt dV = c d\tau \gamma dV$$

e siccome c e $d\tau$ sono invarianti lo è anche γdV .³

Allora usando questa relazione dalla definizione della densità di carica data sopra otteniamo che, essendo dq invariante, è invariante anche ρ/γ , e per vedere quanto vale basta andare nel sistema solidale: lì $\gamma = 1$ e $\rho = \rho_0$, quindi in generale si otterrà che:

$$\rho = \rho_0 \gamma = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.70)$$

e dato che ρ_0 è evidentemente un invariante, potremo definire il quadrivettore:

$$j^\mu = \rho_0 v^\mu = \rho_0 (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = (\rho c, \rho \mathbf{v}) = (\rho c, \mathbf{J}) \quad (1.71)$$

e si ottiene l'importantissimo risultato che sebbene né ρ né $\mathbf{J}$ siano invarianti, insieme formano le componenti di un quadrivettore, cosicché diventa facilissimo vedere le proprietà di trasformazione delle quantità che descrivono le sorgenti del campo da un sistema inerziale ad un altro.

Visto che abbiamo espresso le sorgenti tramite j^μ è naturale cercare di formulare le equazioni di Maxwell in forma covariante, per questo ci occorrono le derivate che abbiamo visto al §1.1.2. Allora potremo vedere come alcune delle relazioni dell'elettromagnetismo espresse al paragrafo precedente trovino una immediata ed elegante espressione in forma relativistica.

Partiamo dall'equazione di continuità: sappiamo che j^μ è un vettore controvariante, per cui possiamo scriverci immediatamente:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial j_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}$$

per cui l'equazione di continuità si ottiene immediatamente come:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.72)$$

Adesso passiamo alle equazioni per i potenziali, se definiamo il quadripotenziale $\phi^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ si vede subito che si possono compendiare tutte le (1.69) per i potenziali con l'espressione:

$$\square \phi^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (1.73)$$

²in realtà abbiamo visto in §1.1.2 che è uno pseudoscalare.

³o meglio è uno pseudoscalare, così come lo è dV nello spazio euclideo.

il che sostanzialmente ci dice (dato che le equazioni si sanno valide, che il d'alambertiano è uno scalare e che j^μ è un vettore) che anche ϕ^μ è un vettore controvariante. Infine è immediato esprimere la gauge di Lorentz come:

$$\partial_\mu \phi^\mu = 0 \quad (1.74)$$

mentre una trasformazione di gauge può essere espressa come:

$$\phi^\mu \rightarrow \phi'^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \psi \quad (1.75)$$

Più complesso invece è esprimere le equazioni dei campi; infatti per i potenziali si hanno quattro funzioni incognite che è naturale associare immediatamente alle componenti di un quadrivettore; ma le componenti dei campi sono sei, ed in un quadrivettore non ci stanno.

A noi però farebbe estremamente comodo poter associare queste componenti ad una qualche quantità dello spazio di Minkowsky perché in tal modo ne otterremmo immediatamente le proprietà di trasformazione; si può notare allora che un tensore del secondo ordine antisimmetrico, in uno spazio a quattro dimensioni, ha effettivamente sei componenti indipendenti; il tentativo dunque sarà quello di esprimere i campi, partendo dai potenziali, attraverso un tensore di questo tipo.

Noi conosciamo le espressioni (1.66) che danno i campi noti i potenziali; il modo più semplice di costruire un tensore antisimmetrico a partire da essi è definire:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu \quad (1.76)$$

la prima cosa da verificare è che esso sia invariante per trasformazioni di gauge; usando questa definizione e la (1.75) è immediato verificarlo, grazie alla proprietà di commutazione delle derivate, infatti:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(\phi_\nu + \partial_\nu \psi) - \partial_\nu(\phi_\mu + \partial_\mu \psi) = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \partial_\mu \psi = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu$$

per cui alla fine $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$.

Adesso si tratta di vedere cosa sono le sue componenti; evidentemente $F_{\mu\mu} = 0$ e $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ per cui basterà considerare solo le componenti con $\mu < \nu$. Cominciamo allora con:

$$F_{0,i} = \partial_0 \phi_i - \partial_i \phi_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \left[-\nabla_i \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] = E_i$$

(ricordiamo che avendo preso il vettore dei potenziali in forma controvariante si ha che $\phi_i = -A_i$) mentre se prendiamo F_{ij} otteniamo:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

che si riconoscono subito come le componenti di $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, e più precisamente:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -H_z \\ F_{13} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = H_y \\ F_{23} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = -H_x \end{aligned}$$

per cui il tensore $F_{\mu\nu}$, detto anche *tensore elettromagnetico*, assume la forma:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

questa è l'espressione per il tensore covariante, si può passare anche all'espressione controvariante usando la relazione $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ che comporta poi che:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu$$

e facendo i conti si ottiene che la sola differenza fra i due è il cambiamento di segno delle componenti date dal campo elettrico.

Adesso vogliamo esprimere le equazioni di Maxwell; avendo un tensore del secondo ordine la cosa più semplice da fare per derivarlo è contrarre con ∂^μ ; allora possiamo provare a considerare cosa viene dall'equazione:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu \quad (1.78)$$

queste sono quattro equazioni, e basta svolgere i conti per verificare che esse corrispondono alle due equazioni di Maxwell che coinvolgono le sorgenti. Talvolta questa equazione viene scritta anche come:

$$\text{div} F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

Restano da scrivere le due equazioni omogenee per i campi, che sono altre quattro componenti; viene allora naturale provare ed esprimerle tramite il rotore (che abbiamo definito al §1.1.2) come:

$$\text{rot} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\beta F_{\alpha\mu} = 0 \quad (1.79)$$

che, ricordando l'espressione del rotore che avevamo trovato, si potrà scrivere come:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} = 0 \quad (1.80)$$

(per tutte le quattro combinazioni per cui $\lambda \neq \mu \neq \nu$). In questa forma può essere facilmente verificato, facendo i conti con le componenti, che le quattro equazioni ottenute corrispondono effettivamente alle due equazioni di Maxwell (1.64b) e (1.64c). Inoltre, dato che il tensore elettromagnetico è antisimmetrico, è ancor più facile verificare la relazione è vera anche se due qualunque degli indici sono uguali, per cui alla fine la (1.80) è un'equazione che vale in generale.

Un altro modo per riscrivere queste equazioni è quello di introdurre, tramite il tensore di Ricci, il *tensore di campo duale*:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

che calcolato esplicitamente diventa:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

e con questo si può riscrivere la (1.79) come:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

e, come si può verificare immediatamente svolgendo i conti per componenti, si riottengono subito le equazioni di Maxwell omogenee.

1.5 Elettrodinamica relativistica

Abbiamo appena visto come si esprimono col formalismo covariante le leggi dell'elettromagnetismo; ci resta da vedere come la presenza dei campi elettromagnetici modifichi la dinamica relativistica.

1.5.1 La legge di Lorentz

Sappiamo che la forza che esprime l'azione dei campi su una carica elettrica, cioè la *forza di Lorentz*, si esprime classicamente come:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (1.81)$$

mentre la potenza dissipata dal campo è:

$$W = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (1.82)$$

e adesso occorre esprimere queste col formalismo covariante: vediamo allora come sia possibile riassumerle in un'unica formula usando la *forza di Minkowsky* (1.48); cominciamo con lo scrivere:

$$f^\nu = \frac{q}{m_0 c} F^{\mu\nu} p_\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\mu \quad (1.83)$$

dato che F^{11} è zero si ottiene ad esempio che:

$$f^1 = \frac{q}{c} [F^{01}v_0 + F^{21}v_2 + F^{31}v_3] = \frac{q}{c} \left[\frac{E_x c}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{B_z v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{B_y v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]$$

cioè:

$$f^1 = \gamma q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_x$$

allo stesso modo è immediato ottenere le componenti y e z , infine è altrettanto semplice trovare che:

$$f^0 = \frac{q}{c} F^{i0} v_i = \gamma \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

per cui alla fine, usando le (1.81) e (1.82):

$$f^\nu = \left(\gamma \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \gamma q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \right) = \left(\gamma \frac{W}{c}, \gamma \mathbf{f} \right) \quad (1.84)$$

che corrisponde esattamente all'espressione (1.48) della forza di Minkowsky, data al §1.3.

Questo ci dice come la (1.83) sia l'estensione naturale delle relazioni classiche (1.82) e (1.81); si noti comunque che esse, pur restando valide in tutti i sistemi di riferimento, non sono le componenti di un quadrivettore, se non quando le moltiplichiamo per γ .

La trattazione precedente vale per una carica puntiforme; normalmente però si ha a che fare con distribuzioni di carica; e per passare a sistemi continui occorre generalizzare la (1.81) e la (1.82) esprimendo la forza e la potenza per unità di carica, che si ottengono da quest'ultime semplicemente dividendo per l'elemento di volume, cioè:

$$\mathcal{F} = \frac{d\mathbf{f}}{dV} = \rho q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \quad (1.85a)$$

$$\mathcal{W} = \frac{dW}{dV} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (1.85b)$$

e adesso diventa importante poter definire anche la densità di forza e di potenza e trovare un'espressione covariante per le (1.85).

La cosa si può fare anche direttamente se ci ricordiamo che γdV è un invariante per cui si vede subito che se definiamo:

$$\mathfrak{f}^\mu = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dV} f^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{dW}{dV}, \frac{d\mathbf{f}}{dV} \right) = \left(\frac{\mathcal{W}}{c}, \mathcal{F} \right) \quad (1.86)$$

questo è un quadrivettore (o meglio una densità vettoriale), e si possono riottenere le (1.86) ponendo:

$$\mathfrak{f}^\beta = \frac{1}{c} F^{\alpha\beta} j_\alpha \quad (1.87)$$

come si può verificare andando per componenti; d'altronde questa può essere ottenuta anche direttamente applicando la definizione alla espressione (1.83) per f^μ ; infatti deve essere:

$$f^\mu = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dV} \frac{q}{m_0 c} F^{\nu\mu} p_\nu = \frac{d}{\gamma dV} \frac{\rho dV}{c} F^{\nu\mu} v_\nu = \frac{\rho_0}{c} F^{\nu\mu} v_\nu$$

e ricordando la (1.70) e definizione (1.71) di j_ν da questa si ha la (1.87).

Infine si possono legare direttamente p^μ e $\mathfrak{f}^\mu$; dalla definizione si ottiene infatti:

$$\mathfrak{f}^\mu = \frac{d}{\gamma dV} f^\mu = \frac{d}{\gamma dV} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt dV} = c \frac{dp^\mu}{d^4x}$$

1.5.2 L'elettrodinamica

La dinamica studiata al §1.3 va adesso applicata al caso della presenza di un campo elettrico; e bisogna riformulare i principi di conservazione (dell'energia, dell'impulso, ecc.) per tener conto di quest'ultimo. Introduciamo allora il *tensore energia-impulso* $T^{\mu\nu}$ definito dalla relazione:

$$\mathfrak{f}^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} T^{\mu\nu} \quad (1.88)$$

che nel caso di $\mathfrak{f}^\mu = 0$ ci da, come vedremo più avanti, tutte le leggi di conservazione richieste.

Si tratta dunque di ricavare l'espressione di $T^{\mu\nu}$ conoscendo l'espressione di $\mathfrak{f}^\mu$; nel caso del campo elettromagnetico si può fare questo passaggio, vedremo però più avanti, in §4 che il procedimento corretto è quello di partire da $T^{\mu\nu}$ ed ottenere $\mathfrak{f}^\mu$ con la (1.88). Si noti poi che la (1.88) non definisce univocamente $T^{\mu\nu}$ dato che ad esso si potrà aggiungere sempre un altro tensore a divergenza nulla; vedremo che questo ci permetterà, qualora non lo fosse, di rendere $T^{\mu\nu}$ un tensore simmetrico, rendendo insignificante l'indice rispetto al quale si esegue la divergenza.

Vediamo allora come ottenere la nostra espressione per $T^{\mu\nu}$; combinando la (1.87) con l'espressione per j^μ che si ricava invertendo la (1.78), si ottiene che:

$$\mathfrak{f}^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\alpha} j_\alpha = \frac{1}{c} F^{\mu\alpha} \frac{c}{4\pi} (\partial^\lambda F_{\lambda\alpha}) = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} (\partial^\lambda F_{\lambda\alpha}) \quad (1.89)$$

ma se consideriamo che:

$$\partial^\lambda (F^{\mu\alpha} F_{\lambda\alpha}) = (\partial^\lambda F^{\mu\alpha}) F_{\lambda\alpha} + F^{\mu\alpha} (\partial^\lambda F_{\lambda\alpha})$$

si ottiene che:

$$\mathfrak{f}^\mu = \frac{1}{4\pi} [\partial^\lambda (F^{\mu\alpha} F_{\lambda\alpha}) - F_{\lambda\alpha} (\partial^\lambda F^{\mu\alpha})]$$

consideriamo adesso il secondo termine; scambiando gli indici di entrambi i tensori si ottiene che:

$$F_{\lambda\alpha} (\partial^\lambda F^{\mu\alpha}) = F_{\alpha\lambda} (\partial^\lambda F^{\alpha\mu})$$

(dato che il tensore elettromagnetico è antisimmetrico), ma qui si somma su λ e α per cui queste si possono scambiare fra loro semplicemente cambiando loro nome; quindi in definitiva vale anche:

$$F_{\lambda\alpha} (\partial^\lambda F^{\mu\alpha}) = F_{\lambda\alpha} (\partial^\alpha F^{\lambda\mu})$$

dunque possiamo scrivere che:

$$F_{\lambda\alpha}(\partial^\lambda F^{\mu\alpha}) = \frac{1}{2}F_{\lambda\alpha}(\partial^\lambda F^{\mu\alpha} + \partial^\alpha F^{\lambda\mu})$$

e da questa, usando la (1.80), si ha che:

$$F_{\lambda\alpha}(\partial^\lambda F^{\mu\alpha}) = -\frac{1}{2}F_{\lambda\alpha}(\partial^\mu F^{\alpha\lambda}) = \frac{1}{2}F_{\lambda\alpha}\partial^\mu F^{\lambda\alpha}$$

adesso questa si può trattare ulteriormente partendo da:

$$\partial^\mu(F^{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha}) = F_{\lambda\alpha}(\partial^\mu F^{\lambda\alpha}) + F^{\lambda\alpha}(\partial^\mu F_{\lambda\alpha})$$

e si possono alzare e riabbassare gli indici nell'ultimo termine e verificare che è uguale al primo (sono un po' di conti con i tensori metrici), per cui:

$$\partial^\mu(F^{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha}) = 2F_{\lambda\alpha}(\partial^\mu F^{\lambda\alpha})$$

per cui alla fine:

$$F_{\lambda\alpha}(\partial^\lambda F^{\mu\alpha}) = -\frac{1}{4}\partial^\mu(F^{\alpha\lambda}F_{\lambda\alpha})$$

e se andiamo a sostituire questa nella (1.89) si ottiene che:

$$\mathfrak{f}^\mu = \frac{1}{4\pi}[\partial^\lambda(F^{\mu\alpha}F_{\lambda\alpha}) - \frac{1}{4}\partial^\mu(F^{\alpha\lambda}F_{\lambda\alpha})] \quad (1.90)$$

a questo punto si verifica immediatamente che se prendiamo:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})] = \frac{1}{4\pi}[F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F^{\beta\alpha}F_{\alpha\beta})] \quad (1.91)$$

e dalla (1.88) si riottiene subito la (1.90).

Vediamo allora cosa è $T^{\mu\nu}$; per prima cosa dobbiamo ricavarci F^μ_ν e $F^{\mu\nu}$ da $F_{\mu\nu}$; è banale fare i conti per ottenere che:

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

con queste possiamo ricavare subito il secondo addendo della (1.91):

$$F^{\beta\alpha}F_{\alpha\beta} = F^{i0}F_{0i} + F^{ij}F_{ji} + F^{0i}F_{i0}$$

ed è immediato dalle rispettive espressioni ottenere che:

$$\begin{aligned} F^{i0}F_{0i} &= F^{0i}F_{i0} = |\mathbf{E}|^2 \\ F^{1i}F_{i1} &= -H_z^2 - H_y^2 \\ F^{2i}F_{i2} &= -H_z^2 - H_x^2 \\ F^{3i}F_{i3} &= -H_y^2 - H_x^2 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$F^{\beta\alpha}F_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2) \quad (1.92)$$

che ci dice anche che $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2$ è un invariante; adesso iniziamo a calcolarci le componenti; per la prima abbiamo che:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}F^{0\lambda}F^\lambda_0 + \frac{1}{16\pi}g^{00}F^{\beta\alpha}F_{\alpha\beta}$$

ma evidentemente $F^{0\lambda}F_{\lambda}^0 = F^{0i}F_i^0 = -|\mathbf{E}|^2$ per cui si ottiene che:

$$T^{00} = -\frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) = -\mathcal{W}$$

dato che la densità di potenza per il campo e.m. è appunto data da

$$\mathcal{W} = \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) \quad (1.93)$$

per gli altri elementi consideriamo che:

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} F^{0\lambda} F_{\lambda}^i = \frac{1}{4\pi} F^{0j} F_j^i$$

che calcolato esplicitamente da:

$$\begin{aligned} T^{01} &= \frac{1}{4\pi} F^{0j} F_j^1 = \frac{1}{4\pi} (-E_y H_z + E_z H_y) = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x \\ T^{02} &= \frac{1}{4\pi} F^{0j} F_j^2 = \frac{1}{4\pi} (E_x H_z - E_z H_x) = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_y \\ T^{03} &= \frac{1}{4\pi} F^{0j} F_j^3 = \frac{1}{4\pi} (-E_x H_y + E_y H_x) = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_z \end{aligned}$$

e se ricordiamo che il vettore di Pointing è definito come:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (1.94)$$

si ottiene che:

$$T^{0i} = T^{i0} = \frac{1}{c} \mathbf{S}$$

si possono poi calcolare le componenti T^{ij} e verificare che corrispondono al tensore degli sforzi di Maxwell; in definitiva si ottiene che:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mathcal{W} & -\frac{S_x}{c} & -\frac{S_x}{c} & -\frac{S_x}{c} \\ -\frac{S_x}{c} & T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ -\frac{S_x}{c} & T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ -\frac{S_x}{c} & T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

La (1.88) contiene in forma differenziale le varie leggi di conservazione, torneremo sull'argomento in generale in §4; per il caso specifico consideriamo $\mathfrak{f}^0$, otteniamo:

$$\mathfrak{f}^0 = \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu}$$

e cioè:

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{S}$$

che è appunto il bilancio energetico espresso dal teorema di Pointing; se calcoliamo esplicitamente le altre tre componenti di $\mathfrak{f}^\mu$ possiamo ottenere il bilancio dell'impulso.

1.6 Formulazione lagrangiana

Come ultimo argomento vediamo come si può introdurre una formulazione lagrangiana del moto di una particella, analoga a quella della meccanica analitica classica, anche in relatività ristretta.

1.6.1 Formulazione lagrangiana del moto di una particella libera

La formulazione lagrangiana della meccanica relativistica si costruisce per analogia con la meccanica classica; il punto di partenza è sempre il principio di minima azione; in meccanica classica l'azione è definita a partire dalla lagrangiana del sistema L , che in generale è funzione solo delle coordinate q e delle loro derivate $\dot{q}$ (il moto è completamente determinato dalla posizione e dalla velocità iniziale) come:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.96)$$

e dal principio di minima azione si ottengono le *equazioni di Eulero-Lagrange*:⁴

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.97)$$

che sono le equazioni del moto.

La lagrangiana di una particella libera poi si può ottenere con considerazioni del tutto generali (vedi sempre [LL]) dall'isotropia dello spazio e del tempo e dal principio di relatività galileiana, come:

$$L = \frac{1}{2}mv^2$$

Come si vede tutte queste espressioni non sono Lorentz-invarianti, e si tratta dunque di trovarne delle opportune estensioni. Prendiamo allora come punto di partenza il principio di minima azione, se questo deve continuare a valere si ha che S deve essere uno scalare, dato che le equazioni del moto derivano dalla condizione di estremo su di essa.

Con l'assunto che l'azione sia invariante, dalla (1.96) siamo allora in grado di ricavare le proprietà di trasformazione della lagrangiana L ; introducendo $d\tau = \gamma dt$ infatti otteniamo che:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L d\tau \quad (1.98)$$

e siccome $d\tau$ è invariante otteniamo che lo è pure γL ; adesso se vogliamo ottenere la lagrangiana di una particella libera ancora una volta, per l'omogeneità dello spazio-tempo questo non potrà dipendere dalle coordinate, ma solo dalla velocità, ma l'unica funzione invariante della quadrivelocità è $v^\mu v_\mu = c^2$, per cui alla fine avremo che:

$$\gamma L = \alpha c^2 \quad \text{cioè} \quad L = \alpha c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

il confronto col precedente limite classico determina α e ci dà:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.99)$$

e si può verificare che questa, con le (1.97), dà la corretta equazione del moto per una particella libera:

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_0 \mathbf{v}) = 0$$

inoltre si può verificare che con questa lagrangiana si riottengono i valori dell'impulso e dell'energia trovati al §1.3.1 con le definizioni:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \quad \text{e} \quad E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$$

⁴per una trattazione completa ad esempio vedi [LL]

Dalla (1.99) si può inoltre ottenere l'espressione dell'azione per una particella libera; sostituendo nella (1.98) si ha:

$$S = -m_0 c^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -m_0 c \int ds$$

Resta però aperto il problema di esprimere le equazioni del moto in forma covariante a vista, e di ottenere il quadrimpulso come un opportuno momento coniugato. Un modo per farlo è introdurre come lagrangiana relativistica invariante:

$$\mathcal{L} = \gamma L$$

che a questo punto viene pensata funzione delle coordinate x^μ e della quadrivelocità v^μ , cioè $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, v^\mu)$; l'azione allora si esprime come:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(x^\mu, v^\mu) d\tau \quad (1.100)$$

ed un'estensione covariante a vista delle (1.97) può essere:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (1.101)$$

ottenere questa però è tutt'altro che banale; si noti anzitutto che queste sono, nel caso di una particella, quattro equazioni contro le tre precedenti; il problema è che se usa la (1.100) col caso noto di una particella libera per la quale:

$$\mathcal{L} = -mc^2 = -mv_\mu v^\mu = -mg_{\mu\nu} v^\nu v^\mu$$

quando si va a fare il calcolo variazionale per avere l'equazione del moto si deve tenere conto del vincolo $v_\mu v^\mu = c^2$, che equivalentemente si può esprimere come:

$$v_\mu \frac{\partial v^\mu}{\partial t} = 0$$

per cui non tutte le componenti della (1.101) sono indipendenti.

Una forma equivalente della (1.101) si può ottenere esprimendo la (1.100) in funzione di ds (che nel caso di una particella libera ci dice semplicemente che per il principio di minima azione una particella in moto tende a seguire le geodetiche) in tal caso applicando il principio variazionale si ha:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}$$

dove $u^\mu = dx^\mu/ds$. Infine si può ottenere l'espressione del quadrimpulso come momento coniugato se prendiamo:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^\mu}$$

1.6.2 Formulazione lagrangiana del moto di una carica puntiforme

Adesso vogliamo provare ad esprimere in forma analitica le equazioni del moto per una carica puntiforme; dall'espressione (1.83) della forza di Minkowsky dovuta al campo elettromagnetico ottenuta al §1.5.1 si ha che:

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{i\mu} v_\mu = \frac{e}{c} \left[\frac{\partial \phi^\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^i}{\partial x_\mu} \right] v_\mu$$

adesso però osserviamo che:

$$\frac{d\phi^i}{d\tau} = \frac{\partial\phi^i}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{\partial\phi^i}{\partial x_\mu} v_\mu$$

per cui si ottiene, sostituendo questa nella precedente e portando le derivate rispetto a τ a primo membro, che:

$$\frac{d}{d\tau} \left(p^i - \frac{e}{c} \phi^i \right) = \frac{e}{c} \frac{\partial\phi^i}{\partial x_\mu} v_\mu \quad (1.102)$$

Adesso se vogliamo seguire lo schema della meccanica analitica dovremmo riscrivere queste equazioni ricavandole dalla (1.101) allora si verifica subito che se poniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 v^\mu v_\mu + \frac{e}{c} \phi^\mu v_\mu$$

la parte spaziale della (1.101) ci dà la (1.102).

Il secondo membro della (1.101) si calcola immediatamente dato che in $\mathcal{L}$ solo ϕ^μ dipende dalle coordinate, per il primo membro dobbiamo sostanzialmente calcolarci la derivata del termine in $v^\mu v_\mu$, dato che l'altro termine è banale; sarà allora:

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} v^\alpha v_\alpha = \frac{\partial}{\partial v_\mu} g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = v_\alpha g^{\alpha\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial v_\mu} + v_\beta g^{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\mu} = v_\alpha g^{\alpha\beta} \delta_\beta^\mu + v_\beta g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu$$

dalla quale si ottiene subito:

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} v^\alpha v_\alpha = 2v_\mu$$

dunque l'equazione di Lagrange ci dà:

$$\frac{d}{d\tau} \left(p^\mu + \frac{e}{c} \phi^\mu \right) = \frac{e}{c} \frac{\partial\phi^\mu}{\partial x_\nu} v_\nu$$

la cui parte spaziale ci fornisce subito la (1.102), come volevasi dimostrare.

Si noti che in presenza di un campo elettromagnetico il momento coniugato non è più l'usuale impulso meccanico p^μ bensì:

$$\mathbf{p}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu} = p^\mu + \frac{e}{c} \phi^\mu$$

in cui compare il secondo termine, che esprime l'impulso associato al campo elettromagnetico.

Capitolo 2

L'equazione di Dirac

Il primo tentativo di accordare meccanica quantistica e relatività è stato quello di costruire un'equazione d'onda Lorentz-covariante, i problemi e le difficoltà riscontrate nel perseguire tale proposito, e le inconsistenze emerse hanno poi costretto ad una radicale reimpostazione del problema attraverso la teoria dei campi; ciò non di meno la meccanica quantistica relativistica costituisce una teoria estremamente interessante ed un background indispensabile per la successiva teoria dei campi.

2.1 Lo scontro fra meccanica quantistica e relatività

I primi approcci per cercare di armonizzare i risultati della meccanica quantistica classica con la teoria della relatività sono stati basati principalmente sui tentativi di costruire una equazione d'onda che fosse covariante.

I primi tentativi si sono dovuti però scontrare con delle difficoltà insormontabili, in particolare il problema fondamentale è che la trattazione della meccanica quantistica classica è essenzialmente hamiltoniana, e attribuisce cioè un ruolo privilegiato al tempo, cosa che è in contrasto con la trattazione covariante che tratta quest'ultimo alla stregua delle variabili spaziali. Le soluzioni proposte pertanto comportavano dilemmi e paradossi, che sono stati risolti soltanto a pieno solo con la teoria quantistica dei campi.

2.1.1 Alcuni concetti base

In meccanica quantistica lo stato di un sistema è rappresentato da un vettore di stato normalizzato $|\psi\rangle$ in un opportuno spazio di Hilbert, oppure, nel caso generale di miscela di stati, da una matrice densità $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$. Le quantità osservabili sono associate a operatori *hermitiani* (o *autoaggiunti*) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ e il valor medio di una misura di una osservabile $\mathfrak{A}$ su un sistema nello stato $|\psi\rangle$ è dato da $\langle\psi|\mathfrak{A}|\psi\rangle$.

Le osservabili si ottengono col *principio di corrispondenza*; si tratta cioè di sostituire alle quantità numeriche delle relazioni classiche della meccanica analitica gli opportuni operatori; individuate le coordinate lagrangiane q_i del sistema ed i rispettivi momenti coniugati p_i come osservabili di base il principio fornisce i corrispondenti operatori quantistici tramite le relazioni:

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

così ad esempio otteniamo, per una particella libera, che l'operatore associato all'osservabile impulso è $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$.

L'evoluzione dinamica del sistema è data poi dall'*equazione di Schroedinger*:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \mathfrak{H}|\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

dove $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^\dagger$ è l'operatore associato all'hamiltoniana del sistema, ottenuto col principio di corrispondenza dalla espressione della meccanica analitica in termini delle variabili canoniche. Ovviamente questa è un osservabile (l'energia) e quindi autoaggiunto.

In modo equivalente si può usare la rappresentazione di Heisenberg, in tal caso dato lo stato ad un istante iniziale $|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle$ si avrà:

$$|\psi(t)\rangle = \mathfrak{U}(t; t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

dove $\mathfrak{U}(t; t_0)$ è un operatore unitario (cioè $\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^{-1}$) detto *operatore di evoluzione* che, come si può ottenere dalla (2.1), obbedisce all'*equazione di Heisenberg*:

$$i\hbar \frac{\partial \mathfrak{U}(t, t_0)}{\partial t} = \mathfrak{H}(t) \mathfrak{U}(t, t_0) \quad (2.2)$$

L'equazione di Schroedinger comunque gioca un ruolo fondamentale; infatti è a partire dal principio di corrispondenza che si riesce a costruire l'hamiltoniana e poi quest'equazione; le altre si ottengono poi attraverso cambiamenti di rappresentazione nello spazio di Hilbert, per cui quando vorremo costruire una meccanica quantistica relativistica dovremo comunque partire da essa.

Quando si cerca di estendere tutto questo alla relatività ristretta ci si trova di fronte ad una difficoltà; infatti in relatività il tempo e lo spazio non possono essere trattati separatamente e nel caso di una particella singola si ottiene l'espressione (1.50) per energia ed impulso vista in §1.3.1, che ci dice la possibilità di un'equivalenza massa-energia.

Il problema nasce allora proprio qui. Quando si va a cercare una descrizione relativistica di una particella puntiforme troviamo sempre una scala fondamentale per l'impulso che è $p = mc$ e quindi una lunghezza d'onda Compton:

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

allora dato che per il principio di indeterminazione si ha che $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ per individuare una particella su distanze inferiori a λ otteniamo un'incertezza sul momento dell'ordine di mc , cioè sufficiente alla creazione di nuove particelle, viene così a perdere senso il concetto di particella singola.

Questo ci dice subito che la meccanica quantistica relativistica avrà senso in questo intervallo di energie intermedio, andando oltre diventerà necessario ricorrere alla teoria dei campi.

2.1.2 La costruzione di un'equazione relativistica

Per tentare di costruire un'equazione che combini invarianza relativistica e meccanica quantistica osserviamo che dal principio di corrispondenza e dall'equazione di Schroedinger si possono derivare le due relazioni:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (2.3b)$$

e notiamo che queste si possono agevolmente riassumere in forma covariante come:

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu \quad (2.4)$$

Nella meccanica quantistica classica l'equazione per una particella singola libera si ottiene partendo dalla espressione classica dell'energia:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

sostituendo in questa gli operatori delle (2.3); in relatività però l'equazione che da l'energia è:

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (2.5)$$

e questa non la si può quantizzare così banalmente, perché nasce il problema dell'operatore radice quadrata. Esso infatti può essere definito solo come serie di potenze, e questo, comportando derivate spaziali di ogni ordine, da luogo ad un'equazione non locale, assolutamente intrattabile. Inoltre usando questa espressione si perderebbe completamente la simmetria fra tempo e spazio tipica della relatività.

2.1.3 L'equazione di Klein-Gordon

Dato che l'uso della (2.5) non è proponibile il primo tentativo fu quello di mantenere la simmetria fra tempo e spazio usando la relazione di Einstein trovata in (1.50) se quantizziamo questa col solito sistema si ottiene la cosiddetta *equazione di Klein-Gordon*:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

che si può riscrivere come:

$$-\hbar^2 c^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = m^2 c^4 \phi(\mathbf{x}, t)$$

cioè, introducendo il d'alambertiano, come:

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.7)$$

e quest'ultima si può riesprimere in forma operatoriale usando la (2.4) come:

$$(p^2 - m^2 c^2) \phi(\mathbf{x}, t) = 0$$

dunque l'equazione di Klein-Gordon non esprime altro che il modulo quadro del quadrimpulso.

Il problema di quest'equazione è che si voleva interpretare $\phi(\mathbf{x}, t)$ come la funzione d'onda che da la densità di probabilità; per questo però sarebbe necessario trovare una norma definita positiva sullo spazio di queste funzioni, che sia conservata nell'evoluzione temporale.

Per farlo ci servono allora una densità ρ ed una corrente $\mathbf{j}$ definite tramite ϕ con le quali scrivere una equazione di continuità; nel nostro caso poi, usando un formalismo relativistico, ci converrà cercare direttamente una quadricorrente $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$.

Per trovarla si procede in modo analogo a quanto si fa con l'equazione di Schroedinger, si moltiplica la (2.7) per ϕ^* e la sua coniugata per ϕ e si sottraggono, si ottiene così:

$$\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^* = 0$$

che si può anche riscrivere come:

$$\partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = 0$$

che è l'equazione di continuità voluta; si ha allora una corrente conservata:

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2mc} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = \frac{1}{2mc} (\phi^* p^\mu \phi - \phi p^\mu \phi^*)$$

che si è presa in questa forma per averla adimensionale.

Il problema è che questa corrente non dà più luogo ad una densità definita positiva, infatti in questo caso si ha che:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)$$

e questa non è affatto definita positiva, e non è neanche detto che se ad un certo istante $\rho > 0$ questo continui a valere in seguito.

Un altro problema nasce dal fatto che avendo preso un'espressione quadratica questa equazione consente anche soluzioni ad energia negativa (corrispondenti alla radice negativa della (1.50)) dovute alla presenza di derivate seconde. Tutto ciò portò ad un rapido abbandono dell'equazione di Klein-Gordon, anche se oggi, interpretando la ρ come una densità di carica e le soluzioni ad energia negativa come antiparticelle si è tornati ad usarla con successo per trattare i campi scalari.

2.2 L'equazione di Dirac

Benché in realtà, come vedremo più avanti, il problema che aveva portato a scartare l'equazione di Klein-Gordon non venisse affatto risolto, a partire dall'insoddisfazione nei confronti di quest'ultima Dirac tentò un approccio diverso che portò ad uno dei risultati più rilevanti della fisica del '900, la scoperta dell'antimateria.

2.2.1 La costruzione dell'equazione

Ritenendo che i problemi di una densità non definita positiva e della presenza di soluzioni ad energia negativa fossero sostanzialmente dovuti alla presenza nell'equazione di Klein-Gordon di derivate seconde, Dirac decise di cercare un'equazione in cui comparissero soltanto le derivate prime, la scrisse allora come:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + mc^2 \beta \psi \quad (2.8)$$

che è ancora nella forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad \text{dove} \quad H = c \alpha_i p^i + mc^2 \beta \quad (2.9)$$

e poi impose che questa fosse invariante, che desse una densità definita positiva e che iterata riportasse all'equazione di Klein-Gordon. Come vedremo subito con queste condizioni α_i e β non possono essere numeri, per questo fece l'ipotesi generale che ψ fosse un vettore colonna di funzioni:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

e α_i e β matrici $N \times N$.

Vediamo allora come imponendo le condizioni richieste si determinino le proprietà di queste matrici; una prima, implicita nel fatto che lo spazio è isotropo e omogeneo, è che esse devono essere costanti; vogliamo poi che la (2.8) dia luogo ad un'equazione di continuità; allora prendiamone la coniugata che è:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = i\hbar c \left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_1} \alpha_1^\dagger + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_2} \alpha_2^\dagger + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_3} \alpha_3^\dagger \right) + mc^2 \psi^\dagger \beta^\dagger$$

adesso moltiplichiamo la (2.8) per $\psi^\dagger$ a sinistra e questa per ψ a destra e sottraiamo l'una dall'altra; si ottiene:

$$i\hbar \left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi \right) = -i\hbar c \left(\psi^\dagger \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_i} \alpha_i^\dagger \psi \right) + mc^2 (\psi^\dagger \beta^\dagger \psi - \psi^\dagger \beta \psi)$$

adesso il primo membro di questa è proprio nella forma $\partial \rho / \partial t$ dove:

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^N \psi_i^* \psi_i \quad (\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*))$$

che è evidentemente definita positiva, resta da imporre che il secondo membro sia effettivamente una divergenza; da questo si ottiene subito che deve essere $\beta^\dagger = \beta$ per eliminare l'ultimo addendo che, non contenendo derivate, non può comunque ridursi ad una divergenza; rimane così solo il termine nella forma:

$$\psi^\dagger \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_i} \alpha_i^\dagger \psi$$

e questa è una divergenza se $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$ nel qual caso si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\psi^\dagger \alpha_i \psi)$$

si ottengono così le due condizioni:

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad \text{e} \quad \beta^\dagger = \beta \quad (2.10)$$

che si sarebbero potute ottenere anche imponendo che l'hamiltoniana H nella (2.9) fosse hermitiana. In definitiva, applicate queste condizioni e diviso il tutto per $i\hbar$ si ottiene una equazione di continuità per la corrente j^μ definita come:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) = (c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi)$$

dove con $\boldsymbol{\alpha}$ si è indicato il vettore delle α_i .

Resta da imporre l'ultima condizione, e cioè che la (2.8) iterata si riduca all'equazione di Klein-Gordon; esplicitamente si avrà:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \left(-i\hbar c \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + mc^2 \beta \right) \left(-i\hbar c \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + mc^2 \beta \right) \psi \\ &= -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} - i\hbar mc^3 \left(\beta \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \alpha_k \beta \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) + m^2 c^4 \beta^2 \psi \end{aligned}$$

e vogliamo che questa si riduca alla (2.6), per cui dovremo eguagliare gli stessi termini delle derivate. Per il primo membro siamo già a posto; nel secondo vediamo subito che dal termine in ψ deriva immediatamente che:

$$\beta^2 = \mathbb{I}$$

mentre il termine nelle derivate prime, dato che k e i sono indici muti lo possiamo riscrivere direttamente come:

$$-i\hbar mc^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

e dunque:

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

per le derivate seconde invece bisogna stare attenti, infatti per il teorema di Schwartz esse sono simmetriche rispetto allo scambio degli indici, e quindi non tutti i termini della somma su k e

i sono indipendenti, ad esempio non si potrà imporre che sia zero $\alpha_i\alpha_k$ perché anche $\alpha_k\alpha_i$ si riferisce allo stesso termine, questo termine però si può riscrivere simmetrizzandolo come:

$$\left(\frac{\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i}{2}\right) \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k}$$

ed adesso si è cancellata la parte antisimmetrica (che nel prodotto era comunque nulla perché contratta con quella simmetrica) e queste sono tutte indipendenti, equindi si ottiene:

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}\mathbb{I}$$

dunque in definitiva le relazioni che otteniamo sono:

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}\mathbb{I} \quad (2.11a)$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \quad (2.11b)$$

$$\beta^2 = \mathbb{I} \quad (2.11c)$$

queste relazioni, insieme alle (2.10), ci dicono anche che le matrici α_i e β formano con l'identità un'algebra che è chiamata *algebra di Dirac*.

Se chiamiamo $\beta = \alpha_4$ introducendo l'anticommutatore possiamo ricompattare le tre equazioni precedenti nell'unica:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I} \quad \text{con} \quad i, j = 1 \dots 4 \quad (2.12)$$

con queste equazioni possiamo cercare di determinare meglio le proprietà di queste matrici; la (2.12) ci dice che le α_j anticommutano, cioè che per $i \neq j$ si ha che:

$$\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i = (-\mathbb{I})\alpha_j\alpha_i$$

per cui se prendiamo i determinanti deve essere:

$$\det(\alpha_i)\det(\alpha_j) = \det(-\mathbb{I})\det(\alpha_j)\det(\alpha_i) = (-1)^N\det(\alpha_j)\det(\alpha_i)$$

e se vogliamo, come richiesto dal fatto che $\alpha_j^2 = \mathbb{I}$, che i determinanti non siano nulli, occorre che N sia pari.

Un'altra proprietà è che le matrici devono essere a traccia nulla, sempre dall'anticommutazione infatti si ha che $\alpha_i = -\alpha_j\alpha_i\alpha_j$ per $i \neq j$ e dunque si ottiene:

$$\text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_j\alpha_i\alpha_j) = -\text{Tr}(\alpha_j^2\alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i)$$

sfruttando la proprietà ciclica della traccia e la relazione $\alpha_j^2 = \mathbb{I}$; per cui dovrà essere:

$$\text{Tr}(\alpha_i) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1 \dots 4$$

Si tratta allora di provare a trovare delle matrici che obbediscano a queste relazioni; il primo tentativo si può fare con $N = 2$; in questo caso matrici idempotenti che commutano fra di loro le conosciamo già, e sono le tre matrici σ di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e queste sono a traccia nulla ed hermitiane, però sappiamo anche che queste più l'unità formano una base per le matrici 2×2 , cioè data una matrice 2×2 qualsiasi A essa può essere scomposta unicamente come:

$$A = a_0\mathbb{I} + a_k\sigma_k = a_0\mathbb{I} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ora se cerchiamo un'altra matrice che anticommuti con tutte le σ e ne sia indipendente, da questa otteniamo che deve avere un a_0 non nullo, ed allora non può anticommutare, perché l'identità non lo fa mai.

Allora con $N = 2$ il gioco non funziona; possiamo però vedere che con $N = 4$ la cosa è possibile, e senza stare a far conti per trovarle si può verificare che se prendiamo:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

(dove σ_i e $\mathbb{I}$ e 0 sono matrici 2×2) queste verificano tutte le (2.11) e sono a traccia nulla ed hermitiane. Abbiamo allora trovato quattro matrici che soddisfano le relazioni richieste e per questo vengono dette una “rappresentazione” dell'algebra definita dalle (2.11), ed in particolare questa è chiamata *rappresentazione di Dirac*.

L'espressione (2.13) non è l'unica possibile, si può dimostrare come una qualunque trasformazione unitaria S di matrici che soddisfano le (2.11) è ancora una rappresentazione valida, la verifica è immediata usando la (2.12), infatti:

$$\alpha'_i \alpha'_j + \alpha'_j \alpha'_i = S \alpha_i S^{-1} S \alpha_j S^{-1} + S \alpha_j S^{-1} S \alpha_i S^{-1} = S(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) S^{-1} = 2\delta_{ik} S S^{-1}$$

quindi l'algebra è invariante, l'altra condizione è che le α'_i siano ancora hermitiane, ma:

$$(\alpha'_i)^\dagger = (S \alpha_i S^{-1})^\dagger = (S^{-1})^\dagger (\alpha_i)^\dagger S^\dagger = (S^{-1})^\dagger (\alpha_i) S^\dagger$$

ed essendo S unitaria da $S^\dagger = S^{-1}$ segue $(S^{-1})^\dagger = S^{\dagger\dagger} = S$ e dunque:

$$(\alpha'_i)^\dagger = S \alpha_i S^{-1} = \alpha'_i$$

ecco dunque che da una rappresentazione se ne possono ottenere quante se ne vuole attraverso una trasformazione unitaria; la condizione di unitarietà è comunque necessaria, perché una trasformazione qualsiasi pur lasciando identica l'equazione di Dirac non conserverebbe la densità ρ definita prima, è banale verificare invece che questo avviene per trasformazioni unitarie, che conservano anche la corrente $\mathbf{j}$ (quest'ultima condizione comunque non è strettamente necessaria dato che $\mathbf{j}$ è sempre definita a meno di un vettore solenoidale).

Trovata una rappresentazione dell'algebra di Dirac per $N = 4$ sorge spontanea la domanda se ci possano essere altre rappresentazioni significative con $N > 4$; si può dimostrare che ci sono rappresentazioni di quest'algebra per ogni N multiplo di 4, ma che esse non hanno alcun significato fisico ulteriore dando luogo ad equazioni disaccoppiate che si riducono a quella con $N = 4$.

2.2.2 Il limite classico dell'equazione di Dirac

Per capire se questa equazione ha davvero un significato fisico vogliamo verificare cosa diventa al limite non relativistico; in questo caso $v \ll c$ per cui nella (2.9) in H il termine $c\mathbf{p}$ è trascurabile e l'equazione diventa:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2 \beta \psi$$

(che è valida esattamente solo per $v = 0$) adesso l'equazione si risolve banalmente perché nella rappresentazione (2.13) β è diagonale e si ha:

$$\psi_1 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_2 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_3 = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_4 = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e qui salta fuori la magagna, infatti le prime due van bene, ma le altre due no poiché sono soluzioni ad energia negativa, e ci si ritrova con lo stesso problema dell'equazione di Klein-Gordon.

In questo caso però l'interpretazione probabilistica, dato che ρ è ancora definita positiva, non viene meno; inoltre l'equazione lascia intravedere alcuni sviluppi estremamente significativi; infatti se cancelliamo le componenti relative alle soluzioni ad energia negativa vediamo che ψ_1 e ψ_2 sono identici agli autostati di una particella di spin 1/2, suggerendo la possibilità di ottenere lo spin, introdotto ad hoc in meccanica quantistica, direttamente dalla relatività, senza doverlo più postulare come caratteristica intrinseca della particella.

Per verificare tale possibilità Dirac accantonò sul momento il problema delle soluzioni ad energia negativa, per vedere cosa succede quando si aggiunge l'interazione elettromagnetica; la prima cosa fu riscrivere ψ nei termini di quelle che sono chiamate rispettivamente grande e piccola componente (φ e χ) come:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

dove evidentemente χ e φ sono spinori 2×1 ; poi introduciamo l'interazione elettromagnetica con la sostituzione minimale (vedremo i dettagli in §2.6.1) per cui la (2.9) diventa:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha}(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}) + mc^2\beta + e\phi \right] \psi \quad (2.14)$$

allora se prendiamo il momento coniugato:

$$\boldsymbol{\pi} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

si può riscrivere la (2.14) nei termini delle componenti χ e φ come sistema di equazioni accoppiate: usando la definizione e la rappresentazione (2.13) che abbiamo trovato per le nostre matrici otteniamo che:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\chi + e\phi\varphi + mc^2\varphi \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} &= c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\varphi + e\phi\chi - mc^2\chi \end{aligned}$$

Nel caso non relativistico il termine principale è quello in mc^2 , e queste si semplificano introducendo la variazione temporale principale negli spinori e prendendo i nuovi:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\varphi \\ \Psi &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\chi \end{aligned}$$

che sostituiti nella precedente danno:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\Psi + e\phi\Phi \quad (2.15a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})\Phi + e\phi\Psi - 2mc^2\Psi \quad (2.15b)$$

adesso nella seconda si può introdurre l'approssimazione non relativistica per piccoli valori dell'energia cinetica e del potenziale¹, trascurando tutti i termini in Ψ , che è la piccola componente, tranne quello in mc^2 , si ottiene:

$$\Psi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc}\Phi$$

¹piccoli vuol dire trascurabili rispetto alla massa mc^2 .

per cui la prima delle (2.15) ci da l'equazione finale per Φ :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m} + e\phi \right] \Phi$$

e da questa, sfruttando l'identità:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

si ottiene che:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi})$$

ma dalla definizione:

$$i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) = i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] \times \left[-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] = \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

dunque alla fine l'equazione diventa:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\phi \right] \Phi$$

che è esattamente l'equazione di Pauli, con lo spin dell'elettrone. Si noti anche che l'interazione dello spin col campo magnetico ha la forma:

$$H_{\text{inter}} = -\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

dove si è definito il momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ come:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} = 2 \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = 2\mu_B \mathbf{s}$$

dove $\mathbf{s}$ definito dalla relazione che esprime l'operatore di spin $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2 = \hbar \mathbf{s}$ (è cioè lo spin in unità $\hbar$) mentre:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (2.16)$$

è il *magnetone di Bohr*.

Nella meccanica classica l'interazione di una carica in moto circolare col campo magnetico è descritta da una energia di interazione del tipo:

$$H = \frac{e}{2mc} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \quad (2.17)$$

con $\mathbf{L}$ momento angolare orbitale; questa in meccanica quantistica classica resta uguale solo che si usa l'operatore di momento angolare orbitale $\mathbf{L} = \hbar \mathbf{l}$; l'interazione perciò è ancora nella forma della (2.17) con $\boldsymbol{\mu} = \mu_B \mathbf{l}$.

Nel nostro caso troviamo che l'elettrone ha una ulteriore interazione di tipo momento angolare, dovuta alla presenza del termine dello spin, ma il momento magnetico è il doppio del valore che si ottiene nella meccanica quantistica classica; dall'equazione di Dirac dunque si ottiene non solo lo spin dell'elettrone, ma anche il corretto valore del *rapporto giromagnetico* g definito dalla relazione:

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_B \mathbf{j}$$

che risulta appunto essere $g = 2$, come risulta sperimentalmente, ma che nella teoria di Pauli era stato introdotto ad hoc, insieme allo spin, per poter spiegare i risultati sperimentali.

Il fatto che l'equazione di Dirac riuscisse ad ottenere tutti questi risultati con la semplice richiesta di invarianza relativistica fece sì che i problemi che avevano portato all'abbandono dell'equazione di Klein-Gordon venissero in un primo tempo accantonati prima che Dirac, spinto dal successo ottenuto, risolvesse la questione introducendo l'esistenza dell'antimateria.

2.3 Covarianza dell'equazione di Dirac

Fino a qui tutto quello che è stato fatto è di trovare una equazione del primo ordine che avesse una corrispondenza con la relazione di Einstein (1.50). Il passo successivo è dimostrare che l'equazione di Dirac è effettivamente covariante; per farlo la forma (2.8) non è opportuna; per questo conviene moltiplicare a sinistra per β/c e portare tutto a primo membro; si ottiene:

$$i\hbar \frac{\beta}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\hbar \beta \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - mc\psi = 0$$

adesso raccogliamo $i\hbar$ e definiamo le nuove matrici:

$$\gamma^0 = \beta \quad \text{e} \quad \gamma^i = \beta \alpha_i$$

così la precedente diventa:

$$\left[i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - mc \right] \psi = 0$$

che si può riscrivere in forma covariante come:

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi = 0 \quad (2.18)$$

e questa è la firma classica dell'equazione di Dirac, che si riconduce, con le condizioni di quantizzazione, all'equazione operatoriale $\gamma^\mu \mathbf{p}_\mu = mc$

2.3.1 Le proprietà delle matrici γ^μ

Data la (2.18) si tratta di far vedere che effettivamente si può considerare l'indice μ delle γ^μ come un indice covariante; se usiamo la rappresentazione di Dirac (2.13) vista in precedenza possiamo immediatamente esprimere le γ^μ come:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

e dato un qualsiasi quadrivettore A_μ si introduce una notazione dovuta a Feynmann (*slash di Feynmann*) indicando con $\not{A}$ il prodotto scalare:

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu = \gamma^0 A_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{A}$$

così la (2.18) diventa:

$$(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0 \quad (2.20)$$

e l'identità operatoriale analoga alla (2.4) è $\not{\partial} = mc$.

Le proprietà delle γ^μ si ricavano dalla loro definizione in termini di β e delle α_i dalle proprietà di quest'ultime; abbiamo già visto che $\gamma^0 = \beta$ è hermitiana, mentre per le altre si ha che:

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta \alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i \beta$$

ma dalle regole di anticommutazione segue che $\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i$ per cui alla fine si ottiene che:

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad \text{e} \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$$

quindi le γ^i sono *antihermitiane*; dalla precedente, dato che $\beta^2 = \mathbb{I}$, si ottiene anche che:

$$(\gamma^i)^\dagger = \alpha_i \beta = \beta^2 \alpha_i \beta = \beta (\beta \alpha_i) \beta = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0$$

e dato che questo vale evidentemente anche per γ^0 in definitiva si possono riassumere le precedenti in:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (2.21)$$

Le proprietà di anticommutazione, che definiscono l'algebra delle γ^μ , si ottengono ancora dalle analoghe per β e α_i ; cominciamo col calcolare:

$$\{\gamma^0, \gamma^j\} = \gamma^0 \gamma^j + \gamma^j \gamma^0 = \beta(\beta\alpha_i) + (\beta\alpha_i)\beta$$

qui si può anticommutare β e α_i nel secondo membro, ottenendo immediatamente:

$$\{\gamma^0, \gamma^j\} = \beta\beta\alpha_i - \beta\beta\alpha_i = 0$$

prendiamo poi:

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \beta\alpha_i \beta\alpha_j + \beta\alpha_j \beta\alpha_i$$

qui si può anticommutare la parte centrale di entrambi gli addendi ottenendo:

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = -\beta^2(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 0$$

infine è immediato che $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$, mentre si ha:

$$(\gamma^i)^2 = \beta\alpha_i \beta\alpha_i = -\beta^2 \alpha_i^2 = -\mathbb{I}$$

(si noti che non si è usata l'espressione esplicita delle γ^μ dato che queste relazioni sono del tutto generali e valide per qualsiasi rappresentazione); in definitiva si possono riassumere le proprietà di anticommutazione usando il tensore metrico nell'unica relazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I} \quad (2.22)$$

Infine, come per le matrici β ed α_i , anche per le γ^μ si possono ottenere altre rappresentazioni diverse dalla (2.19) attraverso delle trasformazioni unitarie; si può però dimostrare (non staremo a farlo) anche l'inverso, e cioè che qualsiasi rappresentazione può essere ottenuta dalla rappresentazione di Dirac tramite una trasformazione unitaria.

2.3.2 La prova della covarianza

Se vogliamo dimostrare che l'equazione di Dirac è covariante basterà mostrare che se $\psi(x)$ è lo spinore che descrive una particella in un certo sistema inerziale, in un qualsiasi altro sistema inerziale possiamo trovare, con un'opportuna legge di trasformazione, uno spinore $\psi'(x')$ che dia gli stessi risultati fisici di $\psi(x)$.

Questo allora comporta che anche $\psi'(x')$ dovrà essere soluzione dell'equazione di Dirac (2.18); in generale dunque dovrà essere:

$$\left(i\hbar \tilde{\gamma}^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi'(x') = 0$$

dove le $\tilde{\gamma}^\mu$ non è detto siano esattamente le stesse viste in §2.3.1, in quanto l'unica condizione che possiamo imporre è che anch'esse soddisfino le relazioni (2.22) e (2.21); ma abbiamo detto che comunque tutte le γ^μ sono equivalenti a meno di una trasformazione unitaria, per cui si può tranquillamente richiedere che sia:

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi'(x') = 0 \quad (2.23)$$

e se riusciamo a trovare la trasformazione degli spinori che ci permette di verificare questa, la covarianza è dimostrata.

Il primo caso, molto semplice, è quello delle traslazioni; in tal caso la trasformazione si può scrivere nella forma più generale come:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

dove a^{μ} è un qualunque vettore costante; in questo caso basta prendere:

$$\psi'(x') = \psi(x)$$

e dato che ovviamente:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

la (2.23) è immediatamente soddisfatta. Dunque per quanto riguarda le traslazioni la covarianza è dimostrata.

Resta da vedere cosa succede nel caso una trasformazione di Lorentz generica (comprendente sia boost che rotazioni spaziali) da un sistema S ad un sistema S' . Abbiamo visto in §1.1.2 la legge di trasformazione delle coordinate (1.19) e le sue proprietà: che conserva l'elemento di linea ds , quali sono le condizioni su Λ e che per trasformazioni proprie $\det \Lambda = +1$.

Essendo sia le trasformazioni di Lorentz che l'equazione di Dirac lineari cercheremo anche la trasformazione dello spinore nella forma di una trasformazione lineare (ovviamente non singolare) $S(\Lambda)$ tale che:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (2.24)$$

che dipenda solo dai parametri della trasformazione di Lorentz. Da questa con la (1.19) si ottiene:

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

e viceversa si avrà che:

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x)$$

d'altra parte siccome S e S' sono completamente arbitrari possiamo applicare la (2.24) nel passaggio inverso da S' a S ottenendo:

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$$

che confrontata con la precedente ci permette di scrivere:

$$S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda)$$

allo stesso modo si può dimostrare che se Λ_1 e Λ_2 sono due trasformazioni di Lorentz si ha:

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2)$$

che unita alla precedente ci dice che le $S(\Lambda)$ formano un gruppo continuo (l'unità è $S(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$) rispetto ai parametri delle trasformazioni di Lorentz.

Vediamo adesso cosa comporta la condizione che $\psi'(x')$ continui a soddisfare la (2.23); dalla (2.18) per $\psi(x)$ si ha che:

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc\right)\psi = \left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc\right)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

da questa, considerando che $S^{-1}(\Lambda)$ non dipende dalle coordinate, si ha:

$$i\hbar\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi'(x') - mcS^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

che moltiplicata a sinistra per $S(\Lambda)$ diventa:

$$i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi'(x') - mc\psi'(x') = 0$$

e vogliamo che questa si riduca alla (2.23); ma dalla trasformazione delle coordinate si ottiene subito che:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

dunque sostituendo si ha:

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - mc \right) \psi'(x')$$

e perché questa dia la (2.23) dovrà essere:

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

e questa è la condizione che devono soddisfare le $S(\Lambda)$, un altro modo di scriverla si ottiene moltiplicandola a sinistra per $S^{-1}(\Lambda)$ e a destra per $S(\Lambda)$:

$$\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) \quad (2.25)$$

che ci dà la legge di trasformazione delle γ^μ . Sappiamo poi che le trasformazioni devono conservare la metrica, e nel §1.1.2 abbiamo visto come questo si traduce nella condizione sulle Λ^ν_μ espressa in (1.21), un altro modo di scrivere quella relazione è:

$$\delta^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\alpha \Lambda^\alpha_\mu \quad (2.26)$$

(con un po' di conti la si trova facilmente da $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$) e si può riscrivere la (2.25) nella forma:

$$\gamma^\mu = \Lambda^\mu_\nu S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) \quad (2.27)$$

Abbiamo visto prima che le $S(\Lambda)$ costituiscono un gruppo continuo nei parametri della trasformazione di Lorentz; l'ipotesi che si fa, e che verificheremo essere corretta trovandolo, è che questo sia un gruppo di Lie, per cui potremo, sfruttando la (2.27) e la (2.26), cominciare a costruire $S(\Lambda)$ partendo dalle trasformazioni infinitesime:

$$\Lambda^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu \quad (2.28)$$

per la (2.26) si avrà che:

$$\delta^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\alpha \Lambda^\alpha_\mu = (\delta^\nu_\alpha + \Delta\omega^\nu_\alpha)(\delta^\alpha_\mu + \Delta\omega^\alpha_\mu) = \delta^\nu_\alpha \delta^\alpha_\mu + \delta^\nu_\alpha \Delta\omega^\alpha_\mu + \delta^\alpha_\mu \Delta\omega^\nu_\alpha + \Delta\omega^\nu_\alpha \Delta\omega^\alpha_\mu$$

adesso in questa l'ultimo termine è del secondo ordine e si può trascurare, mentre per il primo si ha banalmente $\delta^\nu_\alpha \delta^\alpha_\mu = \delta^\nu_\mu$ quindi si annulla col primo membro e alla fine resta, cambiati gli indici con le restanti δ :

$$\Delta\omega^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu = 0 \quad \text{cioè} \quad \Delta\omega^\nu_\mu = -\Delta\omega^\mu_\nu$$

da cui, passando ad indici controvarianti:

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$$

vale a dire che i parametri infinitesimi della trasformazione sono antisimmetrici, da cui segue che solo sei sono indipendenti, e riotteniamo quanto già accennato al §1.1.2. I coefficienti $\Delta\omega^{0i} = \Delta\beta$

provocano un boost di Lorentz infinitesimale di velocità $\Delta\beta$ nella direzione x_i , mentre i $\Delta\omega^i_j = -\Delta\omega^{ij} = \Delta\phi$ generano una rotazione spaziale infinitesimale di angolo $\Delta\phi$ intorno all'asse x_k con $k \neq i \neq j$.

Adesso per ottenere $S(\Lambda)$ utilizziamo l'ipotesi che sia un gruppo di Lie per cui esiste uno sviluppo in serie rispetto ai parametri che, arrestandoci al primo ordine; scriveremo come:

$$S(\Lambda) = \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \quad (2.29)$$

(si è esplicitato il fattore $i/4$ per motivi di comodità) dove $\sigma_{\mu\nu}$, detti anche *generatori del gruppo*, sono matrici 4×4 ; da questa, essendo la S nella forma infinitesima $S(\Lambda) = \mathbb{I} + \Delta T$ si ottiene immediatamente che:

$$S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \quad (2.30)$$

(è banale osservare che in tal caso, fermandoci al primo ordine, è $S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{I}$) inoltre si noti che siccome abbiamo solo sei parametri indipendenti anche le $\sigma_{\mu\nu}$, dovranno essere antisimmetriche negli indici per essere indipendenti (d'altronde nella sommatoria una eventuale parte simmetrica verrebbe automaticamente cancellata essendo antisimmetrici i $\Delta\omega^{\mu\nu}$); dunque sarà:

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

cosicché ai sei parametri delle trasformazioni di Lorentz corrispondono questi sei generatori.

Una ulteriore condizione sulle $\sigma_{\mu\nu}$ si può ottenere normalizzando la trasformazione; se infatti si moltiplica $S(\Lambda)$ per un qualunque numero complesso tutte le relazioni precedenti sono ancora soddisfatte e si riottiene comunque l'equazione di Dirac; si può eliminare parte di questa ambiguità richiedendo che il determinante sia unitario (resta sempre la possibilità di moltiplicare per radici quartiche di uno), nel nostro caso, avendo una matrice infinitesima, vale la relazione:

$$\det S = \det(\mathbb{I} + \Delta T) = 1 + \text{Tr } \Delta T$$

quindi nel nostro caso la condizione $\det S(\Lambda) = 1$ si traduce in:

$$\text{Tr } \left(\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \right) = \frac{i}{4} \Delta\omega^{\mu\nu} \text{Tr } (\sigma_{\mu\nu}) = 0$$

e dunque, dato che i coefficienti sono tutti indipendenti (evidentemente pure $\text{Tr } \sigma_{\mu\nu}$ è antisimmetrico) si ha che:

$$\text{Tr } (\sigma_{\mu\nu}) = 0$$

Adesso possiamo usare le espressioni (2.28), (2.29) e (2.30) delle varie trasformazioni infinitesime nella (2.25) per ottenere una equazione per le $\sigma_{\mu\nu}$; sostituendo si avrà che:

$$(\delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu) \gamma^\mu = \left(\mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right) \gamma^\nu \left(\mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right)$$

da questa, scartati tutti i termini del secondo ordine in $\Delta\omega$, si ha:

$$\gamma^\nu + \Delta\omega^\nu_\mu \gamma^\mu = \gamma^\nu + \frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}$$

che, semplificato il primo termine e raccolto a secondo membro, diventa:

$$\Delta\omega^\nu_\mu \gamma^\mu = -\frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} [\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] \quad (2.31)$$

adesso in questa dobbiamo fattorizzare i parametri $\Delta\omega^{\alpha\beta}$, per questo possiamo scriverci:

$$\Delta\omega^\nu_\mu = g^\nu_\alpha g_{\mu\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \quad (= \delta^\nu_\alpha g_{\mu\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta})$$

ma in questa espressione i fattori non sono tutti indipendenti, dato che $\Delta\omega^{\alpha\beta}$ è antisimmetrico mentre $\delta_\alpha^\nu g_{\mu\beta}$ no, allora se vogliamo una fattorizzazione in termini di coefficienti indipendenti occorre eliminarne la parte simmetrica (che nella sommatoria è identicamente nulla) e riscriverla antisimmetrizzando come:

$$\Delta\omega^\nu_\mu = \frac{1}{2}(g_\alpha^\nu g_{\mu\beta} - g_\beta^\nu g_{\mu\alpha})\Delta\omega^{\alpha\beta}$$

adesso questa si può sostituire nella (2.31), ottenendo:

$$\frac{1}{2}(g_\alpha^\nu g_{\mu\beta} - g_\beta^\nu g_{\mu\alpha})\Delta\omega^{\alpha\beta}\gamma^\mu = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}[\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}]$$

in questa tutti i fattori dei $\Delta\omega^{\alpha\beta}$ sono antisimmetrici e dato che questi ultimi sono arbitrari ed indipendenti si possono tranquillamente semplificare ottenendo:

$$2i(g_\alpha^\nu g_{\mu\beta} - g_\beta^\nu g_{\mu\alpha})\gamma^\mu = [\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}]$$

e se portiamo gli indici $\alpha\beta$ in alto e svolgiamo i conti si ha la definitiva:

$$[\gamma^\nu, \sigma^{\alpha\beta}] = 2i(g^{\nu\alpha}\gamma^\beta - g^{\nu\beta}\gamma^\alpha) \quad (2.32)$$

che è l'espressione finale.

Si tratta allora di trovare sei matrici $\sigma^{\alpha\beta}$ che soddisfino questa condizione; il tentativo più semplice è allora cercare le $\sigma^{\alpha\beta}$ nella forma di un prodotto antisimmetrico delle γ^μ , e si può verificare con le relazioni di anticommutazione che se si prende:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad (2.33)$$

queste effettivamente soddisfano la (2.32) e le altre condizioni richieste.

Una volta che il problema è stato risolto per trasformazioni infinitesime esso si può risolvere in generale con un procedimento di iterazione, infatti nel caso di un valore finito dei parametri $\Delta\omega$ basterà dividere il valore in N parti e iterare la formula facendo poi tendere N all'infinito; allora se $\omega_{\mu\nu}$ sono i valori dei parametri della trasformazione (sono detti *angoli covarianti* per analogia con gli angoli di Eulero delle rotazioni tridimensionali) si può dimostrare che la trasformazione degli spinori assume la forma generale:

$$S(\Lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\omega^{\alpha\beta}}{N} \right)^N = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}$$

che si può riscrivere, sommando solo su fattori indipendenti (cioè con $\alpha > \beta$) come:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\sum_{\alpha>\beta}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} \quad (2.34)$$

e si noti che come per le rotazioni degli spinori classici compare il fattore $1/2$ che fa sì che dopo una rotazione spaziale di 2π lo spinore cambi segno (non è quindi un normale vettore) per ritornare lo stesso solo dopo 4π . Questa ambiguità non ha comunque nessuna conseguenza perché tutte le quantità fisiche osservabili devono essere bilineari negli spinori.

Con questo abbiamo dimostrato la covarianza dell'equazione di Dirac e trovato la matrice di trasformazione degli spinori, anche se limitatamente alle trasformazioni proprie, dato che il procedimento di iterazione porta solo alle trasformazioni connesse con l'identità.

2.3.3 Proprietà delle trasformazioni degli spinori

Torneremo sulle trasformazioni improprie più avanti; per ora osserviamo che la trasformazione (2.34) non è, come nel caso tridimensionale, unitaria (è una conseguenza della metrica pseudoeuclidea dello spazio di Minkowsky). Esaminiamo i generatori della trasformazione; dalla (2.33) si ha che:

$$(\sigma^{\alpha\beta})^\dagger = \left(\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right)^\dagger = -\frac{i}{2} ([\gamma^\alpha, \gamma^\beta])^\dagger = -\frac{i}{2} ((\gamma^\beta)^\dagger (\gamma^\alpha)^\dagger - (\gamma^\alpha)^\dagger (\gamma^\beta)^\dagger)$$

e adesso possiamo sfruttare la (2.21) che ci dice che:

$$(\sigma^{\alpha\beta})^\dagger = -\frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0) = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma^\beta \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^\beta) \gamma^0$$

da ciò è banale osservare che:

$$(\sigma^{\alpha\beta})^\dagger = \frac{i}{2} \gamma^0 [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \gamma^0 = \gamma^0 \sigma^{\alpha\beta} \gamma^0 \quad (2.35)$$

adesso se consideriamo i generatori delle rotazioni tridimensionali questa diventa:

$$(\sigma^{ij})^\dagger = \frac{i}{2} \gamma^0 [\gamma^i, \gamma^j] \gamma^0$$

ma dalle regole di anticommutazione sappiamo che γ^0 anticommuta con le γ^i per cui lo si può portare da sinistra a destra anticommutando due volte (quindi senza cambiare segno) e semplificare, per cui alla fine sia ha:

$$(\sigma^{ij})^\dagger = \sigma^{ij}$$

dunque i generatori delle rotazioni sono hermitiani; se consideriamo invece i generatori dei boost di Lorentz sarà:

$$(\sigma^{0i})^\dagger = \frac{i}{2} \gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i] \gamma^0 = \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^0) = \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i)$$

e dunque si vede subito che:

$$(\sigma^{0i})^\dagger = -\sigma^{0i}$$

cioè sono antihermitiani.

Nella rappresentazione di Dirac possiamo calcolare esplicitamente le $\sigma^{\alpha\beta}$ e si ottiene che hanno la forma:

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

e le proprietà precedenti sono evidenti.

Adesso vediamo cosa succede con le matrici di trasformazione; una prima cosa che si può vedere è che se consideriamo rotazioni pure S_R si ha che:

$$S_R = \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{ij} \omega^{ij}} \right)^\dagger = e^{\frac{i}{4} \sigma_{ij}^\dagger \omega^{ij}} = e^{\frac{i}{4} \sigma_{ij} \omega^{ij}}$$

e quindi $S_R^\dagger = S_R^{-1}$ quindi S_R è unitaria, mentre se consideriamo boost di Lorentz puri S_L si ha:

$$S_L = \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{0i} \omega^{0i}} \right)^\dagger = e^{\frac{i}{4} \sigma_{0i}^\dagger \omega^{0i}} = e^{-\frac{i}{4} \sigma_{0i} \omega^{0i}}$$

dunque $S_L = S_L^\dagger$ quindi S_L è hermitiana; in generale poi potremo dare una legge analoga alla (2.35); infatti con essa possiamo scrivere:

$$S(\Lambda)^\dagger = \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger = e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta} \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}$$

che espansa in serie ci da:

$$S(\Lambda)^\dagger = \mathbb{I} + \frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}\gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0 + \dots + \left(\frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}\right)^n (\gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0)^n + \dots$$

ma evidentemente si ha:

$$(\gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0)^n = \underbrace{\gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0\gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0 \dots \gamma^0\sigma_{\alpha\beta}\gamma^0}_{n \text{ volte}} = \gamma^0\sigma_{\alpha\beta}^n\gamma^0$$

(semplificando i $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{I}$ interni) dunque la precedente si può riscrivere, e raccogliendo tutti i γ^0 agli estremi, come:

$$S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 \left(\mathbb{I} + \frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \dots + \left(\frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}\right)^n (\sigma_{\alpha\beta})^n + \dots \right) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} \right) \gamma^0$$

e alla fine si ottiene che:

$$S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \quad (2.37)$$

che si può esprimere, in forma equivalente, come:

$$S(\Lambda)^{-1} = \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \bar{S}(\Lambda) \quad (2.38)$$

dove $\bar{S}(\Lambda)$, definita proprio come $\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$, viene detta *aggiunta* di $S(\Lambda)$.

2.3.4 La quadricorrente

Abbiamo appena dimostrato la covarianza dell'equazione di Dirac trovando la matrice di trasformazione degli spinori ed alcune sue proprietà; perché la prova sia completa però non basta che lo spinore trasformato continui ad obbedire all'equazione di Dirac, occorre anche che dia luogo alla stessa quadricorrente, così come l'avevamo vista al §2.2.1.

Allora anzitutto dovremo esprimere la quadricorrente j^μ in termini della matrici γ^μ ; per farlo consideriamo che la densità è:

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi$$

mentre la corrente spaziale:

$$\mathbf{j} = c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi = c\psi^\dagger \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \psi$$

dalle quali è immediato ottenere che:

$$j^\mu = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = c\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.39)$$

dove si è definito lo spinore *aggiunto* $\bar{\psi}$ come:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.40a)$$

$$= (\varphi^\dagger, -\chi^\dagger) \quad (2.40b)$$

$$= (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \quad (2.40c)$$

adesso si può cercare l'equazione a cui obbedisce questo; dalla coniugata della (2.18), usando la (2.21) si ottiene:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^\mu} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - mc\psi^\dagger = 0$$

e adesso se si cambia segno e si moltiplica a destra per γ^0 si ottiene banalmente:

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + mc\bar{\psi} = \bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + mc \right) = 0 \quad (2.41)$$

una equazione che viene detta l'*aggiunta* dell'equazione di Dirac originale.² Con questa e con la (2.18) è immediato ottenere l'equazione di continuità moltiplicando la prima a destra per ψ e la seconda a sinistra per $\bar{\psi}$.

Adesso, se consideriamo una trasformazione di Lorentz, dobbiamo vedere cosa fa j^μ , scrivendola esplicitamente si avrà:

$$j'^\mu(x') = c\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') =$$

ma evidentemente:

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = (S(\Lambda)\psi(x))^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

ma sappiamo che $S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$ per cui è anche:

$$S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda)$$

che sostituita sopra da:

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda) \quad (2.42)$$

e si ottiene l'importante risultato che lo spinore aggiunto trasforma con l'inversa; allora usando questa relazione nell'espressione della quadricorrente si ha:

$$j'^\mu = c\bar{\psi}[S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)]\psi$$

adesso però possiamo sfruttare la (2.25) per il fattore in parentesi quadra; ottenendo:

$$j'^\mu = c\bar{\psi}\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu\psi = \Lambda^\mu_\nu c\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = \Lambda^\mu_\nu j^\nu$$

e dunque si è ottenuto che, come deve essere, la quadricorrente trasformata è esattamente il quadrivettore che si ottiene dall'originaria j^μ con la stessa trasformazione di Lorentz.

2.3.5 Le trasformazioni improprie

Si è già accennato a suo tempo che la dimostrazione della covarianza dell'equazione di Dirac fatta al §2.3.2 vale solo per le trasformazioni di Lorentz proprie, cioè per le trasformazioni connesse con l'identità; ci interessa ora vedere cosa accade per le trasformazioni di Lorentz improprie.

In generale si può sempre scomporre una trasformazione di Lorentz impropria nel prodotto di una trasformazione di Lorentz propria per una delle tre trasformazioni improprie di base:

$$\begin{cases} T & : & x_0 \rightarrow -x_0, x_i \rightarrow x_i & \text{Inversione temporale} \\ P & : & x_0 \rightarrow x_0, x_i \rightarrow -x_i & \text{Riflessione spaziale (Parità)} \\ PT & : & x_0 \rightarrow -x_0, x_i \rightarrow -x_i & \text{Inversione di tutte le coordinate} \end{cases} \quad (2.43)$$

le cui matrici di trasformazione sono:

$$(\Lambda_T)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Lambda_P)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\Lambda_{PT})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

e si noti che anche la terza può essere espressa come il prodotto delle prime due, quindi non interessa direttamente.

²si noti come la posizione di $\bar{\psi}$ sia necessariamente sulla destra rispetto all'operatore.

Della prima, che è anche detta *time reversal* ci occuperemo più avanti, dato che l'inversione temporale comporta nella realtà anche l'inversione della dinamica e le cose non sono affatto immediate; per la parità non ci resta che riscriverci la (2.25) con l'espressione appena data e si ottiene, chiamata $P = S(\Lambda_P)$:

$$P^{-1}\gamma^0P = \gamma^0 \quad \text{e} \quad P^{-1}\gamma^kP = -\gamma^k$$

ma adesso basta notare che a secondo membro non si hanno altro che le $(\gamma^\mu)^\dagger$ per cui se usiamo la (2.21) possiamo scrivere:

$$P^{-1}\gamma^\mu P = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

per cui alla fine si ricava:

$$P = \eta\gamma^0$$

dove η però non potrà essere un numero qualsiasi perché abbiamo normalizzato imponendo che sia $\det P = 1$; per cui potrà essere $\eta = (i, -i, 1, -1)$, ed in generale si usa scrivere la matrice di trasformazione come:

$$P = e^{i\phi}\gamma^0 \quad (2.45)$$

e la scelta dei quattro valori per il fattore di fase è ininfluente dato che l'unica condizione fisica che si può richiedere è che quattro riflessioni riportino lo spinore in se stesso, in analogia con le rotazioni dei 4π radianti.

Dalla (2.45) è evidente che $P^\dagger = P^{-1}$. Si noti infine che il limite non relativistico degli spinori è un autostato di P e che gli stati ad energia positiva e negativa hanno autovalore opposto, cioè, come si suol dire, opposta *parità intrinseca*.

Infine si può notare che dalla (2.45) è evidente che P che soddisfa la solita equazione per i coniugati delle trasformazioni; la formula può essere dimostrata però in maniera del tutto generale prendendo la coniugata della (2.25):

$$\Lambda_\mu^\nu(\gamma^\mu)^\dagger = (S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda))^\dagger = S(\Lambda)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger S^{-1}(\Lambda)^\dagger$$

adesso in questa si può usare la (2.21), e tenendo conto che $(S^\dagger)^{-1} = (S^{-1})^\dagger$ si ha:

$$\Lambda_\mu^\nu\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = S(\Lambda)^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0S^\dagger(\Lambda)^{-1}$$

e questa moltiplicando a destra e a sinistra per γ^0 diventa:

$$\Lambda_\mu^\nu\gamma^\mu = \gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0S^\dagger(\Lambda)^{-1}\gamma^0$$

e ora si può riutilizzare la (2.25) per il primo membro ottenendo:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0S^\dagger(\Lambda)^{-1}\gamma^0$$

vale a dire, moltiplicando a sinistra per S e a destra per S^{-1} :

$$\gamma^\nu = (S(\Lambda)\gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0)\gamma^\nu(\gamma^0S^\dagger(\Lambda)^{-1}\gamma^0S^{-1}(\Lambda))$$

ma siccome $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ è evidente che:

$$\gamma^0S^\dagger(\Lambda)^{-1}\gamma^0S^{-1}(\Lambda) = (S(\Lambda)\gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0)^{-1}$$

per cui in definitiva si ottiene:

$$\gamma^\nu = (S(\Lambda)\gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0)\gamma^\nu(S(\Lambda)\gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0)^{-1}$$

vale a dire che:

$$[\gamma^\nu, S(\Lambda)\gamma^0S(\Lambda)^\dagger\gamma^0] = 0$$

cioè la matrice $S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$ commuta con tutte le γ^μ , per cui, per il lemma di Shur che dice che quando un elemento commuta con tutti gli elementi dell'algebra deve essere un multiplo dell'unità, si ha:

$$S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \eta \mathbb{I} \quad (2.46)$$

e adesso η non può essere qualsiasi perché dato che tutti i determinanti di S , $S^\dagger$ e delle γ^μ sono unitari deve essere:

$$\det(\eta \mathbb{I}) = \eta^N = \det(S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0) = 1$$

per cui si ha che $\eta = (i, -i, 1, -1)$; però la coniugata della (2.46) ci dice che:

$$(S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0)^\dagger = \gamma^0 S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger = \eta^* \mathbb{I}$$

che moltiplicata a sinistra per γ^0 ci dà:

$$S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger = \eta^* \gamma^0$$

mentre la (2.46) moltiplicata a destra per γ^0 ci dà:

$$S(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger = \eta \gamma^0$$

per cui è $\eta^* = \eta$ e quindi $\eta = \pm 1$.

Adesso, se ricapitoliamo quanto fin qui ottenuto, possiamo ottenere l'espressione che cerchiamo partendo ancora dalla (2.46) moltiplicata a sinistra S^{-1} e per γ^0 e a destra per γ^0 , si ha:

$$S(\Lambda)^\dagger = \eta \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \quad (2.47)$$

e possiamo anche determinare definitivamente il segno; per farlo consideriamo la traccia:

$$\text{Tr } S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda)$$

evidentemente questo è un operatore hermitiano e positivo, quindi la traccia deve essere positiva; però si può scrivere:

$$S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) = S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S(\Lambda)$$

ma dalla (2.47) si ha $S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \eta \gamma^0 S(\Lambda)^{-1}$ dunque:

$$S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) = \eta \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 S(\Lambda)$$

e adesso possiamo sfruttare la (2.25) con $\nu = 0$ per cui alla fine:

$$S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) = \eta \gamma^0 \Lambda_\mu^0 \gamma^\mu = \eta (\Lambda_0^0 \gamma^0 \gamma^0 + \Lambda_i^0 \gamma^0 \gamma^i) = \eta (\Lambda_0^0 \mathbb{I} + \Lambda_i^0 \alpha_i)$$

dunque presa la traccia si ha:

$$\text{Tr } S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) = \text{Tr } (\eta (\Lambda_0^0 \mathbb{I} + \Lambda_i^0 \alpha_i)) = \eta (\Lambda_0^0 \text{Tr } \mathbb{I} + \Lambda_i^0 \text{Tr } \alpha_i)$$

ma abbiamo visto al paragrafo §2.2.2 che le α_i hanno tutte traccia nulla, quindi alla fine resta:

$$\text{Tr } S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) = 4\eta \Lambda_0^0 > 0$$

così se $\Lambda_0^0 > 0$ si ha $\eta = 1$, mentre se $\Lambda_0^0 < 0$ si ha $\eta = -1$, e questo avviene quando c'è inversione temporale.

2.3.6 I covarianti di Dirac

In generale le matrici 4×4 possono essere espresse tramite una base di 16 matrici indipendenti; evidentemente le γ^μ non coprono tutto lo spazio delle matrici 4×4 , e si può dimostrare che non lo fa neanche l'algebra da esse derivata, ma si possono comunque costruire con le γ^μ 16 matrici indipendenti che risultano molto utili nelle applicazioni di calcolo e hanno proprietà di trasformazione ben definite.

La prima matrice che ci interessa è stata indicata, con una notazione un po' strana che resta in uso per motivi storici, come γ^5 ; essa è definita da:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (2.48)$$

(l'indice non è covariante e non ha importanza dove lo si mette) se usiamo la rappresentazione di Dirac basta fare i conti per ottenere che:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

una definizione equivalente che usa il tensore di Ricci (e ci fa capire meglio le proprietà di trasformazione) è:

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \quad (2.50)$$

l'equivalenza con la precedente definizione si verifica immediatamente, infatti se due indici qualsiasi delle γ sono uguali il termine è nullo per via del tensore di Ricci, e nella somma restano solo i $4!$ termini con gli indici tutti diversi; ciascuno di essi però sarà una permutazione pari o dispari della sequenza fondamentale $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e ci si potrà riportare a questa con un numero pari o dispari di scambi grazie alle relazioni di anticommutazione, ma il segno meno che viene fuori per le permutazioni dispari viene annullato dall'analogo segno del tensore di Ricci, per cui alla fine tutti questi termini sono uguali, ed avendo diviso per $4!$ si riottiene la (2.48).

Dalla definizione si ottengono le proprietà di γ^5 , è abbastanza facile verificare ad esempio, sempre attraverso le regole di anticommutazione, che:

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{I} \quad \text{e} \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (2.51)$$

(per la seconda occorre anche la (2.21)), si tratta solo di fare un po' di conti usando l'espressione (2.48), stando attenti ai segni. Un'altra relazione è che:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (2.52)$$

se lo scriviamo esplicitamente come $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ si nota che, essendo una a destra e l'altra a sinistra, per portare γ^μ a fianco della sua corrispettiva in ciascun addendo ci vorrà un numero di scambi pari per uno e dispari per l'altro o viceversa, per cui emerge una differenza di segno che cancella gli addendi divenuti uguali e dimostra la (2.52).

Una volta definita γ^5 si possono infine definire una serie di matrici indipendenti che possano essere usata come base per lo spazio delle matrici 4×4 , queste matrici sono dette *covarianti di Dirac*, e la loro definizione è:

$$\begin{cases} \Gamma_S = \mathbb{I} & \text{scalare} \\ \Gamma_V^\mu = \gamma^\mu & \text{vettoriale} \\ \Gamma_T^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] & \text{tensoriale(antisimmetrico)} \\ \Gamma_P = \gamma^5 & \text{pseudoscalare} \\ \Gamma_A^\mu = \gamma^5\gamma^\mu & \text{pseudovettoriale(vettoreassiale)} \end{cases} \quad (2.53)$$

Vediamo allora perché queste matrici, che indicheremo genericamente con Γ_X , sono dette covarianti di Dirac; sappiamo infatti che si può parlare di covarianza solo per enti come scalari, vettori, tensori le cui componenti sono quantità numeriche ma non matrici; vedremo che in realtà quello che ha le proprietà di trasformazione riportate nella tabella in (2.53) non è tanto la singola Γ quanto le forme bilineari negli spinori $\bar{\psi}\Gamma_X\psi$ che si possono costruire a partire da esse.

Si tratterà allora di studiare le proprietà di trasformazione di queste forme bilineari verificando che esse corrispondano a quelle riportate nella (2.53); al §2.3.4 abbiamo trovato le proprietà di trasformazione degli spinori che sono:

$$\psi' = S(\Lambda)\psi \quad \text{e} \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)$$

allora è immediato verificare il carattere scalare di Γ_S dato che:

$$\bar{\psi}'\Gamma_S\psi' = \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi = \bar{\psi}\psi = \bar{\psi}\Gamma_S\psi$$

mentre il carattere vettoriale di Γ_V^μ lo abbiamo già visto al §2.3.4 per la quadricorrente; il procedimento per $\Gamma_T^{\mu\nu}$ è lo stesso solo con un po' più di conti:

$$\bar{\psi}'\Gamma_T^{\mu\nu}\psi' = \bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' = \frac{i}{2}\bar{\psi}S^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)S\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}(S^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu S - S^{-1}\gamma^\nu\gamma^\mu S)\psi$$

in questa poi si può inserire il prodotto SS^{-1} fra la γ ottenendo:

$$\bar{\psi}'\Gamma_T^{\mu\nu}\psi' = \frac{i}{2}\bar{\psi}(S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S - S^{-1}\gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\mu S)\psi$$

ed usare per ciascun $S^{-1}\gamma S$ la (2.25) ottenendo:

$$\bar{\psi}'\Gamma_T^{\mu\nu}\psi' = \frac{i}{2}\bar{\psi}(\Lambda^\mu_\alpha\gamma^\alpha\Lambda^\nu_\beta\gamma^\beta - \Lambda^\nu_\delta\gamma^\delta\Lambda^\mu_\gamma\gamma^\gamma)\psi$$

ma dato che le somme sui diversi addendi sono indipendenti e gli indici ripetuti sono qualunque questa si può raccogliere Λ^μ_α e Λ^ν_β ponendo $\alpha = \delta$ e $\beta = \gamma$, per cui si ha:

$$\bar{\psi}'\Gamma_T^{\mu\nu}\psi' = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)\psi = \Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\bar{\psi}\Gamma_T^{\alpha\beta}\psi$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Restano da esaminare le ultime due, per farlo però bisogna chiarire cosa significano pseudoscalare e pseudovettoriale, per questo basta ricordare quanto visto al §1.1.2 quando si sono definite le densità tensoriali: uno pseudoscalare è una quantità che trasforma come l'elemento di volume, cioè una densità scalare di peso 1, mentre uno pseudovettore è una densità vettoriale, sempre di peso 1, sono cioè due quantità che oltre alla normale trasformazione acquisiscono a fattore lo jacobiano $\det \Lambda$.

Vediamo allora cosa succede con Γ_P ; partiamo dalla definizione in (2.53) usando per γ^5 l'espressione (2.50); allora si avrà:

$$\bar{\psi}'\Gamma_P\psi' = \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\left(\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\right)S\psi$$

adesso si inseriscono le solite SS^{-1} fra le γ e sempre usando la (2.25) si ottiene:

$$\bar{\psi}'\Gamma_P\psi' = \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}\left(\frac{i}{4!}[\Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\beta_\nu\Lambda^\gamma_\rho\Lambda^\delta_\sigma\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}]\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)\psi$$

e adesso possiamo usare per la parte in parentesi quadra la proprietà fondamentale del tensore di Ricci (1.28) vista al §1.1.2, ottenendo alla fine:

$$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}\left(\frac{i}{4!}\det\Lambda\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)\psi = \det\Lambda\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

e quindi questo è uno pseudoscalare. Vista questa è immediato ottenere l'analoga anche per Γ_A^μ dato che:

$$\bar{\psi}'\Gamma_A^\mu\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^5\gamma^\mu S\psi = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^5SS^{-1}\gamma^\mu S\psi$$

e adesso per ciascun pezzo possiamo usare quanto già ottenuto per cui alla fine:

$$\bar{\psi}'\Gamma_A^\mu\psi' = \det\Lambda\Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}\Gamma_A^\nu\psi$$

riassumendo si ha che:

$$\bar{\psi}'\Gamma_S\psi' = \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\Gamma_S\psi \quad (2.54a)$$

$$\bar{\psi}'\Gamma_V^\mu\psi' = \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}\Gamma_V^\nu\psi \quad (2.54b)$$

$$\bar{\psi}'\Gamma_T^{\mu\nu}\psi' = \bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' = \Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\bar{\psi}\Gamma_T^{\alpha\beta}\psi \quad (2.54c)$$

$$\bar{\psi}'\Gamma_P\psi' = \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \det\Lambda\bar{\psi}\Gamma_P\psi \quad (2.54d)$$

$$\bar{\psi}'\Gamma_A^\mu\psi' = \bar{\psi}'\gamma^5\gamma^\mu\psi' = \det\Lambda\Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}\Gamma_A^\nu\psi \quad (2.54e)$$

Le Γ_X godono di una serie di proprietà importanti che però non staremo a dimostrare per intero; è però importante notare che a parte la presenza di un fattore i immaginario in alcune di esse possono essere raggruppate in maniera naturale secondo la seguente tabella (vedi [Mes]):

Matrici di Dirac	Forma esplicita	
	$(\gamma_A)^2 = 1$	$(\gamma_A)^2 = -1$
(S) $1 \equiv$	$\mathbb{I}$	—
(V) $\gamma^\mu \equiv \{\gamma^0, \gamma^i\}$	γ^0	$\gamma^1 \quad \gamma^2 \quad \gamma^3$
(T) $\gamma^{[\mu\nu]} \equiv \{\gamma^i\gamma^0, \gamma^5\gamma^0\gamma^i\}$	$\gamma^1\gamma^0 \quad \gamma^2\gamma^0 \quad \gamma^3\gamma^0$	$\gamma^1\gamma^2 \quad \gamma^3\gamma^1 \quad \gamma^2\gamma^3$
(A) $\gamma^{[\mu\nu\rho]} \equiv \{\gamma^0\gamma^5, \gamma^i\gamma^5\}$	$\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	$\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \quad \gamma^0\gamma^3\gamma^1 \quad \gamma^0\gamma^2\gamma^3$
(P) $\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]} \equiv \gamma^5$	—	$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Tabella 2.1: Tabella delle matrici di Dirac

dove con la notazione $\gamma^{[\mu\nu\dots]}$ intenderemo il prodotto di una, due, tre o quattro γ^μ con indici diversi; è banale osservare che queste altro non sono che le componenti delle Γ_X di (2.54); ma usando questa tabella è molto più facile ottenere le proprietà generale delle Γ_X che sono:

- 1) qualunque sia X è $(\Gamma_X)^2 = \pm\mathbb{I}$.
- 2) per qualunque Γ_X (eccetto $\Gamma_S = \mathbb{I}$) esiste una Γ_Y tale che $\Gamma_X\Gamma_Y = -\Gamma_Y\Gamma_X$, vale a dire che per ogni Γ_a esiste una Γ_b che anticommuta con lei.
- 3) la traccia di ogni Γ_X eccettuata Γ_S è nulla.
- 4) per ogni Γ_X, Γ_Y con $a \neq b$ esiste una $\Gamma_Z \neq \Gamma_S \neq \mathbb{I}$ tale che $\Gamma_Z = \Gamma_X\Gamma_Y$.
- 5) le Γ_X sono linearmente indipendenti.

La proprietà 1) la abbiamo già vista per Γ_S, Γ_P e Γ_V ; in ogni caso guardando alle singoli componenti di 2.1 si vede subito che qualunque sia il quadrato scelto si avranno sempre due matrici uguali per ciascun indice diverso, che con un opportuno numero di anticommutazioni (da cui il segno) potranno essere poste a fianco e quindi semplificate fino ad arrivare $\pm\mathbb{I}$.

La proprietà 2) la abbiamo già vista per le Γ_V e Γ_P , per le altre basta notare che per le $\gamma^{[\mu\nu\rho]}$ si può scegliere la opportuna γ^μ in modo da avere un prodotto con quattro indici diversi, ed idem fra le $\gamma^{[\mu\nu]}$ e poi facendo le opportune anticommutazioni si ha la proprietà.

La proprietà 3) si ricava dalle due precedenti; infatti data Γ_X sia Γ_Y quella che anticommuta, allora si avrà che:

$$\text{Tr} (\Gamma_X) = \pm \text{Tr} (\Gamma_X \Gamma_Y^2) = \pm \text{Tr} (\Gamma_Y \Gamma_X \Gamma_Y) = \mp \text{Tr} (\Gamma_Y^2 \Gamma_X) = -\text{Tr} (\Gamma_X)$$

dove il primo passaggio è per la proprietà 1) il secondo per la proprietà ciclica della traccia il terzo per la proprietà 2) ed il quarto tornando indietro con la 1).

La proprietà 4) si capisce subito notando che qualunque sia il prodotto con un opportuno numero di anticommutazioni si può sempre eliminare le eventuali γ^μ doppie ritornando, eventualmente con un segno opposto, ad un'altra delle matrici di tab. 2.1 facendo i conti effettivi si vede anche che con la scelta di (2.54) il segno è sempre positivo.

La proprietà 5) invece si dimostra con le precedenti; consideriamo che sia:

$$\sum_{n=1}^{16} a_n \Gamma_n = 0$$

e moltiplichiamo questa per una qualunque Γ_m prendendo poi la traccia; per la linearità si ottiene che:

$$\text{Tr} (\Gamma_m \sum_n a_n \Gamma_n) = \sum_n a_n \text{Tr} (\Gamma_m \Gamma_n) = 0$$

ma per la proprietà 4) se $m \neq n$ il prodotto $\Gamma_m \Gamma_n$ ci dà una Γ_l la cui traccia, per la proprietà 3) è nulla; allora nella traccia resta solo il termine in Γ_m^2 la cui traccia per la 1) è $\pm 4a_m$ dunque deve essere $a_m = 0$, questo vale per tutti gli m dunque si è dimostrato che le Γ sono linearmente indipendenti.

Ci sono poi ulteriori relazioni interessanti concernenti queste matrici, la prima è:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} = 2i\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} \quad \text{o} \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma} = 2i\gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

che è importante e ci servirà in seguito, la dimostrazione è piuttosto facile anche se noiosa, perché basta verificarla per componenti, scrivendosi tutto in termini delle γ^μ ed usando le proprietà delle $\sigma_{\mu\nu}$ e del tensore di Ricci; la seconda relazione invece è:

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \quad (2.56)$$

dalla proprietà di anticommutazione con le γ^μ segue infatti che:

$$\gamma^\nu \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^5 = \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^5 - \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu = 0$$

dunque $[\gamma^5, \gamma^\nu \gamma^\mu] = 0$ per cui vale anche la (2.56); da essa segue poi che per trasformazioni di Lorentz proprie vale anche:

$$[\gamma^5, S(\Lambda)] = 0$$

in quanto $S(\Lambda)$ è funzione delle $\sigma^{\mu\nu}$; nel caso della parità dall'espressione ottenuta al paragrafo precedente si ha invece che:

$$P\gamma^5 = -\gamma^5 P$$

infine possiamo avere le espressioni per i coniugati hermitiani di Γ_P e Γ_A^μ che, con le solite regole di commutazione e la (2.21) sono:

$$(\Gamma_P)^\dagger = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \Gamma_P \gamma^0 \quad \text{e} \quad (\Gamma_A^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^0 \Gamma_A^\mu \gamma^0$$

2.3.7 Gli operatori di traslazione e rotazione

Prima di cercare le soluzioni dell'equazione di Dirac, conviene esaminare meglio le proprietà del gruppo delle *trasformazioni di Poincarè* (cioè le trasformazioni di Lorentz più le traslazioni). Per farlo cercheremo l'espressione esplicita dei generatori del gruppo nella rappresentazione che se ne dà nello spazio degli spinori.

L'algebra di Lie del gruppo di Poincarè è costituita da 10 generatori, i 4 generatori delle traslazioni che indicheremo con P^μ e i 6 generatori delle trasformazioni di Lorentz generalizzate (boost e rotazioni) che indicheremo con $M^{\mu\nu}$ (e $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$); le regole di commutazione di tale algebra sono:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (2.57a)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i\hbar(g^{\mu\lambda}P^\nu - g^{\nu\lambda}P^\mu) \quad (2.57b)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}] = i\hbar(g^{\mu\lambda}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\lambda}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\lambda} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\lambda}) \quad (2.57c)$$

dove si sono inseriti gli $\hbar$ per poter considerare P^μ come operatore di quadrimpulso e $M^{\mu\nu}$ come operatore di momento angolare (relativistico).

Dati i generatori gli operatori di traslazione e rotazione si ottengono esponenziando, e cioè con le espressioni:

$$T(a) = e^{\frac{i}{\hbar}P_\mu a^\mu} \quad (2.58a)$$

$$R(\omega) = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M_{\mu\nu}}{2}\omega^{\mu\nu}} = e^{\frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \quad (M_{\mu\nu} = \hbar J_{\mu\nu}) \quad (2.58b)$$

dove gli a^μ sono i parametri della traslazione (il quadrivettore di cui si trasla) mentre $\omega^{\mu\nu}$ sono gli angoli covarianti della trasformazione di Lorentz generalizzata.

Adesso bisogna stare attenti a non confondere questi operatori di trasformazione con le matrici che ci danno la trasformazione delle coordinate; nel caso di trasformazioni di coordinate infatti trasforma il sistema di riferimento, mentre lo spinore, come ente geometrico astratto, resta lo stesso e si va soltanto a cercarne l'espressione in componenti nel nuovo sistema di riferimento. Nel nostro caso invece gli operatori non toccano il sistema di riferimento, ma vanno ad agire sugli spinori trasformandoli punto per punto; però siccome sappiamo come trasformano le componenti degli spinori quando le stesse trasformazioni sono applicate al sistema di riferimento, potremo usare queste proprietà per trovare l'espressione di questi operatori.

Indichiamo allora con ψ lo spinore (qualsiasi) da cui partiamo, inteso come ente geometrico astratto e con $T\psi$ il suo trasformato, mentre con $\psi(x)$ e $T\psi(x)$ indicheremo le componenti di detti spinori in un punto generico di coordinate x del sistema di riferimento (qualsiasi) S . Se adesso consideriamo il sistema di riferimento S' ottenuto da S con la stessa trasformazione che abbiamo applicato a ψ in esso otterremo che (avendo trasformato spinore e sistema di riferimento insieme) che le componenti dello spinore $T\psi$ in un punto generico x di S' sono uguali a quelle che ha lo spinore originario ψ nel punto con le stesse coordinate in S , il che, in formule, significa:

$$(T\psi)'(x) = \psi(x) \quad (2.59)$$

analogamente, se consideriamo la trasformazione inversa, (in questo caso si potrà partire da S' ed S è il sistema trasformato) si otterrà che:

$$T^{-1}\psi(x) = \psi'(x) \quad (2.60)$$

Adesso per capire a quali trasformazioni si riferiscono gli operatori (2.58) occorre fare qualche passo avanti; le (2.59) e (2.60) infatti sono delle relazioni fra quantità espresse in sistemi di riferimento diversi e non ci servono a vedere come agiscono gli operatori di trasformazione, perché per vederlo bisogna trovare cos'è lo spinore trasformato rispetto all'originale nello stesso

sistema di riferimento. Il fatto di aver usato solo traslazioni e trasformazioni di Lorentz però ci permette, con le espressioni trovate al §2.3.4 per i cambiamenti di sistema di riferimento, di riportare le quantità che nelle (2.59) sono espresse in S' a quelle in S .

Cominciamo dalla (2.59); vogliamo trovare $(T\psi)'(x)$ in S ; per questo si usa la trasformazione che ci da gli spinori in S' da S , ottenendo:

$$(T\psi)'(x) = S(\Lambda)T\psi(\Lambda^{-1}x)$$

(si ricordi che la trasformazione esprime lo spinore nel punto trasformato, ma noi vogliamo restare nel punto con lo stesso valore delle coordinate, per cui occorre partire da $\Lambda^{-1}x$) questa, sostituita nella (2.59), ci da:

$$S(\Lambda)T\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) \quad \text{cioè} \quad T\psi(\Lambda^{-1}x) = S^{-1}(\Lambda)\psi(x)$$

ma sappiamo che $S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$, inoltre questa, essendo x qualunque, vale anche per $y = \Lambda^{-1}x$ per cui in definitiva si ottiene:

$$T\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi(\Lambda x) \quad (2.61)$$

per la (2.60) le cose sono molto più semplici dato che la trasformazione di coordinate ci dice subito che:

$$T^{-1}\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.62)$$

Adesso si tratta di stabilire quale delle (2.61) e (2.62) sia da applicare con gli operatori (2.58); ricordiamoci che per definizione essi sono quelli che, assegnato un campo spinoriale qualsiasi (l'analogo di un campo vettoriale, in cui in ogni punto dello spazio è assegnato uno spinore invece di un vettore) prendono lo spinore ψ nel punto x e lo mandano (ruotandolo o traslandolo) nel punto trasformato Λx ; allora lo spinore trasformato è quello che ha le componenti $S(\Lambda)\psi(x)$ nel punto trasformato Λx , ma dalla (2.62) è evidente che:

$$T^{-1}\psi(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x)$$

quindi è T^{-1} che agisce nel modo voluto; per questo useremo la (2.62) sostituendovi gli operatori (2.58) che scritti in forma infinitesima sono:

$$T(\Delta a) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} P^\mu \Delta a_\mu\right) \quad (2.63a)$$

$$R(\Delta \omega) = \left(1 + \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \Delta \omega_{\mu\nu}\right) \quad (2.63b)$$

cominciamo con le traslazioni; essendo $\Lambda x = x + \Delta a$ si avrà:

$$\left(1 + \frac{i}{\hbar} P^\mu \Delta a_\mu\right) \psi(x) = \psi(x - \Delta a)$$

ma sviluppando il secondo membro in serie di Taylor fino al primo ordine si ottiene:

$$\left(1 + \frac{i}{\hbar} P^\mu \Delta a_\mu\right) \psi(x) = (1 - \Delta a_\mu \partial^\mu) \psi(x)$$

per cui semplificando in ambo i membri il primo addendo si ottiene:

$$\frac{i}{\hbar} P^\mu \Delta a_\mu \psi(x) = -\Delta a_\mu \partial^\mu \psi(x)$$

e siccome $\psi(x)$ è qualsiasi possiamo eguagliare direttamente:

$$\frac{i}{\hbar} P^\mu \Delta a_\mu = -\Delta a_\mu \partial^\mu$$

ed infine, essendo i Δa_μ arbitrari si ha l'equazione:

$$P^\mu = i\hbar \partial^\mu \quad (2.64)$$

come appunto ci aspettavamo.

Adesso possiamo esaminare le rotazioni; in questo caso dovremo ricordarci le espressioni per le trasformazioni infinitesime delle coordinate (2.28) e degli spinori (2.29) trovate al § 2.3.2; si otterrà così:

$$\left(1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu}\right) \psi(x) = \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu}\right) \psi(x^\mu - \Delta\omega_\nu^\mu x^\nu)$$

al solito sviluppiamo in serie di Taylor lo spinore a secondo membro, sarà:

$$\psi(x^\mu - \Delta\omega_\nu^\mu x^\nu) = \psi(x) - (\Delta\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu) \psi(x) = (1 - \Delta\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu) \psi(x)$$

che sostituita nella precedente ci dà:

$$\left(1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu}\right) \psi(x) = \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu}\right) (1 - \Delta\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu) \psi(x)$$

da questa, tralasciando i termini di ordine superiore, si ottiene:

$$\left(1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu}\right) \psi(x) = \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu} - \Delta\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu\right) \psi(x)$$

qui al solito il primo addendo di ciascun membro si semplifica, e, come prima, essendo lo spinore qualsiasi, si può semplificare pure lui, resta così l'espressione operatoriale:

$$\frac{i}{2} J^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \Delta\omega_{\mu\nu} + \Delta\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu$$

ma scritta così i coefficienti dei $\Delta\omega_{\mu\nu}$ non sono indipendenti perché $x^\nu \partial^\mu$ al contrario degli altri non è un fattore antisimmetrico; allora per poter semplificare i $\Delta\omega_{\mu\nu}$ si deve simmetrizzare; è banale così ottenere che:

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} + i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (2.65)$$

e si noti che adesso, oltre al *momento angolare orbitale*, dato. per analogia col caso tridimensionale, da $M_{orb}^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$, si ha pure un *momento angolare intrinseco* dovuto al termine in $\sigma^{\mu\nu}$.

Come nel caso tridimensionale il momento angolare non è invariante per traslazione in quanto è evidente che questo, per una traslazione a^μ acquista un termine $a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu$, mentre non c'è nessun effetto sul momento angolare intrinseco; per avere un vettore connesso solo a quest'ultimo allora si costruisce il *vettore di Pauli-Lubansky*:

$$W_\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{J^{\beta\gamma} P^\delta}{\sqrt{P^\mu P_\mu}} \quad (2.66)$$

e adesso è banale verificare che la parte orbitale del momento non dà più contributo; infatti essa dà luogo ad un termine del tipo:

$$x^\beta P^\gamma P^\delta - x^\gamma P^\beta P^\delta$$

ma evidentemente i prodotti $P^\gamma P^\delta$ e $P^\beta P^\delta$, per le loro proprietà di commutazione, sono simmetrici ed essendo contratti col tensore di Ricci, che invece è antisimmetrico, questi fattori si

annullano identicamente; inoltre, dato che abbiamo visto che gli spinori soddisfano l'equazione di Klein-Gordon, possiamo scrivere $P^2 = m^2 c^2$ come identità operatoriale (sottintenderemo da qui in avanti la matrice $\mathbb{I}$ quando ci riferiamo ad operatori multipli dell'unità); allora un'espressione equivalente alla (2.66) è:

$$W_\mu = -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\sigma^{\nu\rho}P^\sigma}{mc} = \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma}{mc} \quad (2.67)$$

se andiamo nel sistema solidale poi otteniamo un importante risultato; in tal caso infatti avremo che $P^\mu = (mc, 0)$ per cui è:

$$W_\mu^\circ = -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho 0}\sigma^{\nu\rho}$$

allora dato che $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ è nullo se due indici sono uguali si ottiene immediatamente che $W_0^\circ = 0$; se poi usiamo la rappresentazione di Dirac per le $\sigma^{\nu\rho}$ si ottiene che:

$$W_i^\circ = -\frac{1}{2}\Sigma_i$$

dove Σ_i è la componente del vettore:

$$\Sigma = \gamma^5 \gamma^0 \gamma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

per cui alla fine:

$$W_\mu^\circ = \left(0, -\frac{1}{2}\Sigma\right) \quad (2.69)$$

si ottiene cioè che la parte spaziale di questo vettore ci dà direttamente il vettore di spin (tridimensionale). Dalla definizione (2.67) di W_μ poi segue subito, per la simmetria del prodotto $P^\sigma P^\mu$, che:

$$W_\mu P^\mu = 0$$

(la cosa si ottiene anche in modo diretto usando le espressioni di detti vettori nel sistema solidale), questo ci permette di dire che in qualche modo lo spin è orientato “ortogonalmente” alla direzione del moto, ma non certo nel senso che $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$.

La quantità più interessante non è però W_μ quanto il suo modulo quadro W^2 che è il secondo operatore di Casimir del gruppo di Poincarè (il primo è P^2); dalla teoria dei gruppi allora otteniamo che ogni rappresentazione di tale gruppo su uno spazio vettoriale è caratterizzata da un valore preciso di questi due operatori; nel caso di P^2 sappiamo già che per l'equazione di Dirac esso fissa la massa della particella; vedremo che per W^2 otterremo lo spin; nel nostro caso per calcolarlo si può andare nel sistema solidale, nel quale conosciamo l'espressione di W_μ ; si ha così:

$$W^2 = -\frac{1}{4}(\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2)$$

ma per le proprietà delle matrici di Pauli (ed anche dall'espressione (2.68) in termini delle γ) è banale verificare che $\Sigma_i^2 = \mathbb{I}$ per cui alla fine si ha:

$$W^2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

e quindi se prendiamo per W^2 l'espressione generale:

$$W^2 = s(s+1)$$

si vede subito che i nostri spinori descrivono particelle di spin 1/2.

2.4 Le soluzioni di particella libera

In questo paragrafo cercheremo le soluzioni di particella libera per l'equazione di Dirac (risolveremo cioè l'equazione (2.18)) in modo da capire meglio anche il contenuto fisico dell'equazione di Dirac.

2.4.1 Gli spinori di particella libera

Il metodo di soluzione è quello di usare le trasformate di Fourier, che permettono di trasformare l'equazione differenziale in un'equazione algebrica; pertanto si cercano le soluzioni in forma di onda piana:

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}k \cdot x} w(k) = e^{-\frac{i}{\hbar}k^\mu x_\mu} w(k) = e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - Et)} w(k) \quad (2.70)$$

dove tutta la dipendenza dalle coordinate x è stata inserita nell'esponenziale, mentre $w(k)$ è uno spinore costante.

Con questa definizione possiamo vedere che k^μ viene ad assumere il significato di quadrimpulso della particella; dall'equazione di Klein-Gordon otteniamo infatti banalmente, sostituendovi lo spinore dato dalla (2.70), la relazione di Einstein $k^2 = m^2 c^2$, inoltre se applichiamo alla (2.70) l'operatore quadrimpulso (2.64) si ha:

$$P^\mu \psi(x) = i\hbar \partial^\mu \left(e^{-\frac{i}{\hbar}k \cdot x} w(k) \right) = k^\mu \left(e^{-\frac{i}{\hbar}k \cdot x} w(k) \right) = k^\mu \psi(x)$$

quindi la (2.70) è un autostato dell'operatore quadrimpulso, con autovalore k^μ , la (2.70) quindi descrive gli stati ad impulso definito e l'identificazione di k^μ col quadrimpulso sembra corretta.

Il problema nasce quando andiamo a risolvere la (2.18) esplicitamente, e ritroviamo, come nel caso quasi statico, soluzioni con energia negativa; vediamo allora come si ottiene questo risultato; scriviamo al posto di k^μ il vettore $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$, dall'equazione di Dirac si ha:

$$E w(p) \left(e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \right) = k_i \alpha_i w(p) \left(e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \right) + mc^2 \beta w(p) \left(e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \right)$$

(la si è usata questa forma per comodità); adesso l'esponenziale resta a fattore e si può semplificare; così, portando tutto a secondo membro si ha:

$$-\frac{E}{c} w(p) + k_i \alpha_i w(p) + mc \beta w(p) = 0$$

che è il sistema di equazioni che ci permette di determinare le componenti di $w(p)$; se usiamo la rappresentazione di Dirac è abbastanza semplice trovare:

$$\begin{cases} \left(-\frac{E}{c} + mc \right) w_{(1)}(p) + p_3 w_{(3)}(p) + (p_1 - ip_2) w_{(4)}(p) = 0 \\ \left(-\frac{E}{c} + mc \right) w_{(2)}(p) + (p_1 + ip_2) w_{(3)}(p) - p_3 w_{(4)}(p) = 0 \\ p_3 w_{(1)}(p) + (p_1 - ip_2) w_{(2)}(p) - \left(\frac{E}{c} + mc \right) w_{(3)}(p) = 0 \\ (p_1 + ip_2) w_{(1)}(p) + p_3 w_{(2)}(p) - \left(\frac{E}{c} + mc \right) w_{(4)}(p) = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

dove abbiamo indicato con $w_{(i)}(p)$ le singole componenti degli spinori (mettendo l'indice della componente fra parentesi per non confonderlo con gli altri indici covarianti); questo è un sistema omogeneo, e per avere soluzioni non banali occorre imporre che il determinante sia nullo; allora posto:

$$p_{\pm} = p_1 \pm ip_2$$

questa condizione è:

$$\begin{vmatrix} -\frac{E}{c} + mc & 0 & p_3 & p_- \\ 0 & -\frac{E}{c} + mc & p_+ & p_3 \\ p_3 & p_+ & -\frac{E}{c} - mc & 0 \\ p_- & p_3 & 0 & -\frac{E}{c} - mc \end{vmatrix} = 0$$

questo si calcola al solito modo, e senza stare a fare i conti si ottiene che:

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - \mathbf{p}^2 \right) = 0$$

che ha due soluzioni indipendenti:

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 - \mathbf{p}^2 c^2}$$

questo ci dice che per ogni valore di E solo due delle quattro equazioni del sistema sono indipendenti; allora potremo fissare arbitrariamente il valore di due delle quattro componenti di $w(p)$ (con la sola condizione di prendere soluzioni indipendenti) e con quel che resta del sistema determinare le altre due componenti e definire la soluzione.

Troviamo allora l'espressione esplicita dello spinore; cominciamo con il caso $E > 0$; qui conviene prendere come condizioni $w_{(1)} = A$, $w_{(2)} = 0$ e $w_{(1)} = 0$, $w_{(2)} = A$, dato che in tal caso $E + mc^2$ è sicuramente positivo e diverso da zero, e lo si può dividere nelle ultime due equazioni del sistema (2.71) ottenendo:

$$w_{(1)} = A \quad , \quad w_{(2)} = 0 \quad , \quad w_{(3)} = A \frac{cp_3}{E + mc^2} \quad , \quad w_{(4)} = A \frac{c(p_1 + ip_2)}{E + mc^2} \quad (2.72)$$

$$w_{(1)} = 0 \quad , \quad w_{(2)} = A \quad , \quad w_{(3)} = A \frac{c(p_1 - ip_2)}{E + mc^2} \quad , \quad w_{(4)} = -A \frac{cp_3}{E + mc^2} \quad (2.73)$$

se invece $E < 0$ ci conviene prendere $w_{(3)} = B$, $w_{(4)} = 0$ e $w_{(3)} = 0$, $w_{(4)} = B$ ed usare le prime due dividendo per $E - mc^2$ che è sicuramente negativo e diverso da zero; si ottengono così le altre due soluzioni:

$$w_{(1)} = B \frac{cp_3}{E - mc^2} \quad , \quad w_{(2)} = B \frac{c(p_1 + ip_2)}{E - mc^2} \quad , \quad w_{(3)} = B \quad , \quad w_{(4)} = 0 \quad , \quad (2.74)$$

$$w_{(1)} = B \frac{c(p_1 - ip_2)}{E - mc^2} \quad , \quad w_{(2)} = -B \frac{cp_3}{E - mc^2} \quad , \quad w_{(3)} = 0 \quad , \quad w_{(4)} = B \quad , \quad (2.75)$$

e riassumendo il tutto si scriverà:

$$\begin{aligned} w_1(p) &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_3}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_1 + ip_2)}{E + mc^2} \end{pmatrix} & w_2(p) &= A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{cp_-}{E + mc^2} \\ -\frac{cp_3}{E + mc^2} \end{pmatrix} \\ w_3(p) &= B \begin{pmatrix} \frac{cp_3}{E - mc^2} \\ \frac{c(p_1 + ip_2)}{E - mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & w_4(p) &= B \begin{pmatrix} \frac{cp_-}{E - mc^2} \\ -\frac{cp_3}{E - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tenendo presente che per i primi due $E > 0$ e per i secondi $E < 0$; si noti anche come questi si riducano immediatamente all'espressione non relativistica del §2.2.2 per $v \ll c$.

Un ultimo calcolo è quello della determinazione dei coefficienti A e B che possono essere stabiliti (l'equazione è omogenea) solo dando una normalizzazione per gli spinori; se chiediamo ad esempio che sia $w^\dagger w = 1$ (che è solo una delle normalizzazioni possibili) otterremo che:

$$A = B = \left(\frac{2E_+}{E_+ + mc^2} \right)^{-1/2}$$

dove $E_+ = |E|$ (non stiamo a fare i conti).

2.4.2 Gli stati ad energia positiva e negativa

Abbiamo trovato dunque che anche con l'equazione di Dirac si riottengono le grane dovute alla presenza di soluzioni ad energia negativa; questo è un grosso problema, infatti anche se pure in meccanica relativistica classica si avevano le due radici, quella negativa la si poteva sempre scartare, perché una particella che avesse energia positiva avrebbe comunque mantenuto anche da ferma un'energia positiva pari alla sua massa di riposo, non potendo saltare il gap energetico fra mc^2 e $-mc^2$; in meccanica quantistica però le variazioni di energia possono essere discontinue, e una particella tende sempre a fare una transizione da uno stato di energia superiore ad uno ad energia inferiore; e quindi il passaggio agli stati ad energia negativa sarebbe immediato, e non solo non si potrebbero più eliminare questi stati, ma tutte le particelle dovrebbero decadere verso di essi e da essi giù giù verso $-\infty$. Ovviamente tutto ciò non è accettabile, e si è trovato una soluzione a questo solo considerando gli stati ad energia negativa come antiparticelle grazie all'ipotesi del mare di Dirac, la realtà comunque è che in meccanica quantistica relativistica il concetto di particella singola porta a dei paradossi e che si può fare una trattazione coerente solo con la teoria dei campi.

Abbiamo visto prima come gli spinori nella forma (2.70) siano autostati dell'operatore quadrimpulso, e come k^μ , autovalore corrispondente, sia il valore del quadrimpulso di detti stati; questo però non è del tutto corretto; infatti con la (2.70) otteniamo dei k^μ con $k_0 < 0$, ed in tal caso non sarà più immediato considerare k^μ come il quadrimpulso di una particella.

Vedremo più avanti che si possono reinterpretare gli stati ad energia negativa come antiparticelle; se però vogliamo dare a k^μ il significato di un quadrimpulso dovremo imporre che sia sempre $k_0 > 0$ (questo ci sarà molto utile in seguito); questo però comporta che la (2.70) non va più bene per gli stati ad energia negativa; per questo si preferisce sostituirla con due definizioni separate, una per gli stati ad energia positiva, ed una, cambiando segno all'esponenziale, per gli stati ad energia negativa:

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}k \cdot x} u(k) \quad (\text{stati a energia positiva})$$

$$\psi^{(-)}(x) = e^{\frac{i}{\hbar}k \cdot x} v(k) \quad (\text{stati a energia negativa})$$

Adesso possiamo vedere cosa ci dà l'equazione di Dirac applicata a questi spinori; usiamo l'espressione (2.20) con la notazione di Feynmann, è immediato ottenere che dalla definizione precedente segue:

$$(\not{k} - mc)u(k) = 0 \quad (2.76a)$$

$$(\not{k} + mc)v(k) = 0 \quad (2.76b)$$

(basta eseguire il calcolo, semplificare gli esponenziali e cambiare segno nella seconda).

Per risolvere queste equazioni, considerando il caso di una particella dotata di massa, ci mettiamo nel sistema solidale nel quale $k^\mu = (mc, 0)$ ed esse si riducono a:

$$(\gamma^0 - \mathbb{I})u(mc, 0) = 0$$

$$(\gamma^0 + \mathbb{I})v(mc, 0) = 0$$

queste sono ancora equazioni omogenee, bisogna scartare le soluzioni banali $u = v = 0$ ed andare a cercare quelle non banali; si trovano così in ambedue i casi due soluzioni indipendenti. La soluzione, nella rappresentazione di Dirac dove γ^0 è diagonale, è immediata e si ottiene:

$$u^{(1)}(mc, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(mc, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)}(mc, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(mc, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Queste sono le soluzioni nel sistema solidale, dove la particella è ferma; per ottenere le soluzioni per un moto qualsiasi basterà fare un boost di Lorentz su queste ad una velocità $\mathbf{v} = \mathbf{k}/k_0$ utilizzando le proprietà di trasformazione per ottenere lo spinore desiderato. Fare i conti con le matrici di trasformazione però è scomodo, perché bisogna usare $S(\Lambda)$ nella forma generica (2.34), che è un esponenziale di matrici, il che comporta un calcolo molto complesso con delle serie di potenze. C'è però un metodo molto più semplice; cominciamo con lo scriverci il prodotto:

$$(\not{k} - mc)(\not{k} + mc) = (\not{k} + mc)(\not{k} - mc) = \not{k}^2 - m^2 c^2$$

adesso però:

$$\not{k}^2 = k_\mu \gamma^\mu k_\nu \gamma^\nu = k_\mu k_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu$$

ma qui $k_\mu k_\nu$ è simmetrico nello scambio degli indici (sono numeri), mentre $\gamma^\mu \gamma^\nu$ no; questo ci dice che nel prodotto la parte antisimmetrica di $\gamma^\mu \gamma^\nu$ non dà comunque un contributo; sarà cioè:

$$\not{k}^2 = k_\mu k_\nu \left(\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \right) = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} k_\mu k_\nu$$

ma dalle regole di commutazione si sa che $\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = g^{\mu\nu}$ per cui alla fine si ottiene:

$$\not{k}^2 = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^2 \quad (2.78)$$

e questa vale in generale per qualsiasi vettore k^μ le cui componenti siano numeri o quantità qualunque che commutano fra di loro. Se torniamo allora all'espressione del prodotto da cui eravamo partiti, con questa si ottiene che:

$$(\not{k} - mc)(\not{k} + mc) = (\not{k} + mc)(\not{k} - mc) = k^2 - m^2 c^2 = 0 \quad (2.79)$$

adesso sfruttando questa relazione possiamo ottenere le espressioni generiche degli spinori autostati dell'impulso, soluzioni delle (2.76); consideriamo infatti gli spinori:

$$u'^{(\alpha)}(k) = (\not{k} + mc)u^{(\alpha)}(mc, 0) \quad (2.80a)$$

$$v'^{(\alpha)}(k) = (\not{k} - mc)v^{(\alpha)}(mc, 0) \quad (2.80b)$$

per la (2.79) queste soddisfano evidentemente le (2.76) e sono indipendenti essendole $u^{(\alpha)}(mc, 0)$ e $v^{(\alpha)}(mc, 0)$, resta comunque un problema, le (2.76) sono equazioni omogenee e dunque questi sono definiti a meno di una costante moltiplicativa arbitraria; per eliminare questa ambiguità (o meglio per ridurla solo ad un fattore di fase) si normalizzano gli spinori, e se in partenza $u^{(\alpha)}(mc, 0)$ e $v^{(\alpha)}(mc, 0)$ sono normalizzati non è detto che lo siano anche questi.

Vediamo anzitutto come effettuare la normalizzazione; evidentemente per non dannarsi l'anima conviene effettuarla in maniera covariante, in modo che resti la stessa in tutti i sistemi inerziali; allora dato che sappiamo che $\bar{\psi}\psi$ è invariante converrà imporre la normalizzazione su $\bar{u}u$ e $\bar{v}v$ lasciando perdere per ora le questioni relative all'interpretazione probabilistica. Essendo invariante si può normalizzare nel sistema solidale usando le soluzioni (2.77) che abbiamo trovato; presa la definizione (2.40) degli aggiunti, è banale verificare con un po' di conti che:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)u^{(\beta)}(mc, 0) &= \delta_{\alpha\beta} \\ \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)v^{(\beta)}(mc, 0) &= -\delta_{\alpha\beta} \\ \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)v^{(\beta)}(mc, 0) &= \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)u^{(\beta)}(mc, 0) = 0 \end{aligned} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

si noti anche come, pur avendo usato la rappresentazione di Dirac per ottenere le (2.77), questa relazione resta comunque valida in ogni rappresentazione. Allora dato che gli spinori per un

impulso qualsiasi si ottengono da questi con una trasformazione di Lorentz, e che queste relazioni sono invarianti, scriveremo in generale che la condizione di normalizzazione degli spinori è:

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= \delta_{\alpha\beta} \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= -\delta_{\alpha\beta} \\ \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 0\end{aligned}\quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.81)$$

qualunque sia il valore di k (si noti che la normalizzazione dei v è negativa; questa è una conseguenza della metrica non euclidea).

Adesso bisognerà verificare se gli spinori costruiti con le (2.80) soddisfano effettivamente queste relazioni. Calcoliamoci allora le norme, per $u^{(\alpha)}(k)$ sarà:

$$\begin{aligned}\bar{u}'^{(\alpha)}(k)u'^{(\beta)}(k) &= \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)(\not{k} + mc)(\not{k} + mc)u^{(\beta)}(mc, 0) \\ &= \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)(\not{k} + mc)^2 u^{(\beta)}(mc, 0)\end{aligned}$$

mentre per $v^{(\alpha)}(mc, 0)$ sarà:

$$\begin{aligned}\bar{v}'^{(\alpha)}(k)v'^{(\beta)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)(\not{k} - mc)(\not{k} - mc)v^{(\beta)}(mc, 0) \\ &= \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)(\not{k} - mc)^2 v^{(\beta)}(mc, 0)\end{aligned}$$

ma evidentemente, sfruttando la (2.78) e la (2.79) si avrà:

$$\begin{aligned}(\not{k} + mc)^2 &= k^2 + 2mc\not{k} + m^2c^2 = 2mc(\not{k} + mc) \\ (\not{k} - mc)^2 &= k^2 - 2mc\not{k} + m^2c^2 = -2mc(\not{k} - mc)\end{aligned}\quad (2.82)$$

adesso però consideriamo che dalle espressioni (2.77) è immediato verificare che:

$$u^{(\beta)}(mc, 0) = \gamma^0 u^{(\beta)}(mc, 0) \quad \text{e} \quad v^{(\beta)}(mc, 0) = -\gamma^0 v^{(\beta)}(mc, 0) \quad (2.83a)$$

$$\bar{u}^{(\beta)}(mc, 0) = \bar{u}^{(\beta)}(mc, 0)\gamma^0 \quad \text{e} \quad \bar{v}^{(\beta)}(mc, 0) = -\bar{v}^{(\beta)}(mc, 0)\gamma^0 \quad (2.83b)$$

questo comporta, sfruttando le regole di anticommutazione, che:

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k u^{(\beta)}(mc, 0) &= \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k \gamma^0 u^{(\beta)}(mc, 0) \\ &= -\bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^0 \gamma^k u^{(\beta)}(mc, 0) \\ &= -\bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k u^{(\beta)}(mc, 0) \\ \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k v^{(\beta)}(mc, 0) &= -\bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k \gamma^0 v^{(\beta)}(mc, 0) \\ &= \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^0 \gamma^k v^{(\beta)}(mc, 0) \\ &= -\bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k v^{(\beta)}(mc, 0)\end{aligned}$$

per cui si ha:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k u^{(\beta)}(mc, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)\gamma^k v^{(\beta)}(mc, 0) = 0$$

così alla fine si ottiene che:

$$\begin{aligned}\bar{u}'^{(\alpha)}(k)u'^{(\beta)}(k) &= \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)[2mc(mc + k_0\gamma^0)]u^{(\beta)}(mc, 0) \\ \bar{v}'^{(\alpha)}(k)v'^{(\beta)}(k) &= -\bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)[2mc(mc - k_0\gamma^0)]v^{(\beta)}(mc, 0)\end{aligned}$$

adesso in questa si può ancora riutilizzare la (2.83) per assorbire γ^0 e si ottengono così le espressioni finali:

$$\begin{aligned}\bar{u}'^{(\alpha)}(k)u'^{(\beta)}(k) &= 2mc(mc + k_0)\bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0)u^{(\beta)}(mc, 0) \\ \bar{v}'^{(\alpha)}(k)v'^{(\beta)}(k) &= -2mc(mc + k_0)\bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0)v^{(\beta)}(mc, 0)\end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\begin{aligned}\bar{u}'^{(\alpha)}(k)u'^{(\beta)}(k) &= 2m(mc^2 + E)\delta_{\alpha\beta} \\ \bar{v}'^{(\alpha)}(k)v'^{(\beta)}(k) &= -2m(mc^2 + E)\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

e quindi gli spinori definiti in (2.80) non sono normalizzati, però possiamo definire i nuovi spinori:

$$u^{(\beta)}(k) = \frac{mc + \not{k}}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}}u^{(\beta)}(mc, 0) \quad (2.84a)$$

$$v^{(\beta)}(k) = \frac{mc - \not{k}}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}}v^{(\beta)}(mc, 0) \quad (2.84b)$$

ed i corrispondenti aggiunti:

$$\bar{u}^{(\beta)}(k) = \bar{u}^{(\beta)}(mc, 0)\frac{mc + \not{k}}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}} \quad (2.85a)$$

$$\bar{v}^{(\beta)}(k) = \bar{v}^{(\beta)}(mc, 0)\frac{mc - \not{k}}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}} \quad (2.85b)$$

e questi, per quanto visto prima, sono normalizzati secondo le (2.81). Con queste possiamo anche ottenere le espressioni esplicite nella rappresentazione di Dirac svolgendo i conti, stando allora attenti ai segni del prodotto scalare di $\not{k}$ si può verificare che per gli $u(p)$ è:

$$u^{(1)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}} \begin{pmatrix} p_0 + mc \\ 0 \\ p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 + mc \\ p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} \quad (2.86a)$$

mentre per i $v(p)$ è:

$$v^{(1)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ p_0 + mc \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(mc^2 + E)}} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \\ 0 \\ p_0 + mc \end{pmatrix} \quad (2.86b)$$

Questi spinori soddisfano le relazioni di ortonormalità; si possono però ottenere da essi anche le relazioni di completezza, consideriamo infatti che, sempre con le espressioni che abbiamo trovato, si ha:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[u^{(\alpha)}(mc, 0)\bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0) - v^{(\alpha)}(mc, 0)\bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0) \right] = \mathbb{I}$$

(il prodotto è inteso nel senso di colonna per riga, come prodotto tensoriale), ma al solito potendo andare da questi a quelli generici con un boost di Lorentz è banale verificare che vale anche:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k) - v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k) \right] = \mathbb{I} \quad (2.87)$$

2.4.3 I proiettori su stati di quadrimpulso e spin definito

Avendo trovato le soluzioni in onda piana con le trasformate di Fourier potremo esprimere in generale una soluzione qualsiasi come sovrapposizione di stati puri di quadrimpulso; prima di farlo però conviene analizzare meglio il significato degli spinori $u^{(\alpha)}(k)$ e $v^{(\alpha)}(k)$, cercando anche una relazione con lo spin.

Un primo passo da fare è quello di definire i proiettori relativi a questi stati a quadrimpulso definito; in analogia al caso della meccanica quantistica classica in cui il proiettore su uno stato $|\psi\rangle$ è $|\psi\rangle\langle\psi|$ potremo scrivere il proiettore $\Lambda_+(k)$ su uno stato ad energia positiva di quadrimpulso k come:

$$\Lambda_+(k) = \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) \quad (2.88a)$$

mentre il proiettore $\Lambda_-(k)$ sugli stati ad energia negativa di quadrimpulso k sarà:

$$\Lambda_-(k) = - \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) \quad (2.88b)$$

le (2.88) ci mostrano subito le proprietà di proiettore sugli $u(k)$ di $\Lambda_+(k)$ e sui $v(k)$ di $\Lambda_-(k)$, non sono però una forma molto comoda da usare nei conti e per questo si cerca una espressione più agevole; utilizzandole possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Lambda_+(k) &= \frac{1}{2m(mc^2 + E)}(mc + \not{k}) \left[\sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(mc, 0) \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0) \right] (mc + \not{k}) \\ \Lambda_-(k) &= - \frac{1}{2m(mc^2 + E)}(mc - \not{k}) \left[\sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(mc, 0) \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0) \right] (mc - \not{k}) \end{aligned}$$

ma dalle espressioni degli $u^{(\alpha)}(mc, 0)$ e dei $v^{(\alpha)}(mc, 0)$ si può verificare banalmente che:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(mc, 0) \bar{u}^{(\alpha)}(mc, 0) &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \gamma^0}{2} \\ - \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(mc, 0) \bar{v}^{(\alpha)}(mc, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} = \frac{1 - \gamma^0}{2} \end{aligned}$$

dunque sostituendo nelle precedenti si ha:

$$\begin{aligned} \Lambda_+(k) &= \frac{1}{2m(mc^2 + E)} \left[(mc + \not{k}) \frac{1 + \gamma^0}{2} (mc + \not{k}) \right] \\ &= \frac{1}{4m(mc^2 + E)} \left[(mc + \not{k})^2 + (mc + \not{k}) \gamma^0 (mc + \not{k}) \right] \\ \Lambda_-(k) &= \frac{1}{2m(mc^2 + E)} \left[(mc - \not{k}) \frac{1 + \gamma^0}{2} (mc - \not{k}) \right] \\ &= \frac{1}{4m(mc^2 + E)} \left[(mc - \not{k})^2 + (mc - \not{k}) \gamma^0 (mc - \not{k}) \right] \end{aligned}$$

adesso per entrambe il primo addendo in parentesi quadra lo abbiamo dalle (2.82), resta il secondo che possiamo sviluppare come:

$$\begin{aligned} (mc \pm \not{k}) \gamma^0 (mc \pm \not{k}) &= \not{k} \gamma^0 \not{k} \pm mc(\not{k} \gamma^0 + \gamma^0 \not{k}) + m^2 c^2 \gamma^0 \\ &= \not{k} \{ \gamma^0, \not{k} \} - \not{k} \not{k} \gamma^0 \pm mc \{ \gamma^0, \not{k} \} + m^2 c^2 \gamma^0 \end{aligned}$$

adesso però $\not{k} \not{k} = \not{k}^2 = k^2 = m^2 c^2$ ed il secondo addendo si annulla con l'ultimo, mentre si può raccogliere l'anticommutatore ottenendo:

$$(mc \pm \not{k}) \gamma^0 (mc \pm \not{k}) = (\not{k} \pm mc) \{ \gamma^0, \not{k} \}$$

ma adesso dalle regole di anticommutazione si ha che:

$$\{\gamma^0, \not{k}\} = k_\mu \{\gamma^0, \gamma^\mu\} = 2k_\mu g^{0\mu} = 2k_0 = \frac{2E}{c}$$

dunque alla fine:

$$(mc \pm \not{k})\gamma^0(mc \pm \not{k}) = \frac{2E}{c}(mc \pm \not{k})$$

allora sostituendo questa nelle precedenti espressioni per $\Lambda_\pm(k)$ ed usando anche le (2.82) si ottiene che:

$$\begin{aligned}\Lambda_+(k) &= \frac{1}{4m(mc^2 + E)} \left[2mc(mc + \not{k}) + \frac{2E}{c}(mc + \not{k}) \right] \\ &= \frac{1}{4m(mc^2 + E)} \left[2(mc + \not{k})(mc + \frac{E}{c}) \right] \\ \Lambda_-(k) &= \frac{1}{4m(mc^2 + E)} \left[2mc(mc - \not{k}) + \frac{2E}{c}(mc - \not{k}) \right] \\ &= \frac{1}{4m(mc^2 + E)} \left[2(mc - \not{k})(mc + \frac{E}{c}) \right]\end{aligned}$$

dalle quali è immediato ottenere, con un po' di semplificazioni, le espressioni definitive per i proiettori:

$$\Lambda_+(k) = \frac{(mc + \not{k})}{2mc} \quad (2.89a)$$

$$\Lambda_-(k) = \frac{(mc - \not{k})}{2mc} \quad (2.89b)$$

Un modo molto più rapido per ottenere questi risultati è quello di sfruttare il fatto che gli spinori $u^{(\alpha)}(k)$ e $v^{(\alpha)}(k)$ sono una base nello spazio 4×1 degli spinori, per cui possiamo applicare il teorema che dice che se due operatori danno lo stesso risultato applicati ad una base dello spazio vettoriale su cui operano allora sono lo stesso operatore; dalla definizione in (2.88), grazie alle relazioni di normalizzazione (2.81), si ha:

$$\Lambda_+(k) : \begin{cases} \Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = u^{(\alpha)}(k) \\ \Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = 0 \end{cases} \quad (2.90a)$$

mentre per $\Lambda_-(k)$ si ha:

$$\Lambda_-(k) : \begin{cases} \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) = 0 \\ \Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = v^{(\alpha)}(k) \end{cases} \quad (2.90b)$$

ma adesso notiamo che dalle equazioni per gli spinori (2.76) si ottiene che:

$$\begin{aligned}\frac{\not{k}}{mc}u^{(\alpha)}(k) &= u^{(\alpha)}(k) \\ \frac{\not{k}}{mc}v^{(\alpha)}(k) &= -v^{(\alpha)}(k)\end{aligned}$$

e con queste è banale verificare che le espressioni (2.89) soddisfano le (2.90) e sono quindi gli operatori di proiezione.

Le espressioni in (2.89) sono molto comode per verificare le varie proprietà degli operatori di proiezione; la prima è la proprietà di base di tutti i proiettori e cioè l'*idempotenza*:

$$\Lambda_\pm(k)^2 = \Lambda_\pm(k)$$

la cosa si verifica subito con le espressioni (2.89) usando le (2.82); infatti:

$$\begin{aligned}\Lambda_+(k)^2 &= \frac{(mc + \not{k})^2}{4m^2c^2} = \frac{2mc(mc + \not{k})}{4m^2c^2} = \frac{(mc + \not{k})}{2mc} = \Lambda_+(k) \\ \Lambda_-(k)^2 &= \frac{(mc - \not{k})^2}{4m^2c^2} = \frac{2mc(mc - \not{k})}{4m^2c^2} = \frac{(mc - \not{k})}{2mc} = \Lambda_-(k)\end{aligned}$$

la seconda proprietà ci dice che questi proiettori sono ortogonali, cioè si ha che:

$$\Lambda_+(k)\Lambda_-(k) = \Lambda_-(k)\Lambda_+(k) = 0$$

anche questa si ottiene dalle (2.89); consideriamo la prima, si avrà:

$$\Lambda_+(k)\Lambda_-(k) = \frac{(mc + \not{k})}{2mc} \frac{(mc - \not{k})}{2mc} = \frac{(m^2c^2 - \not{k}^2)}{4m^2c^2} = \frac{(m^2c^2 - m^2c^2)}{4m^2c^2} = 0$$

e allo stesso modo si ottiene che $\Lambda_-(k)\Lambda_+(k) = 0$. Dato poi che le γ^μ sono a traccia nulla si ottiene anche che:

$$\text{Tr } \Lambda_\pm(k) = \frac{mc}{2mc} \text{Tr } (\mathbb{I}) \pm k_\mu \text{Tr } (\gamma^\mu) = 2$$

infine se prendiamo le espressioni originali dei proiettori in termini degli spinori è immediato verificare la proprietà di completezza, cioè che:

$$\Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

ma altrettanto si ottiene con le (2.89) dato che:

$$\Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \frac{(mc + \not{k})}{2mc} + \frac{(mc - \not{k})}{2mc} = \frac{2mc}{2mc} = \mathbb{I}$$

Abbiamo così trovato le espressioni e le proprietà dei proiettori sugli stati di impulso definito ad energia positiva e negativa; ci resta da caratterizzare l'ulteriore degenerazione degli spinori, che abbiamo visto essere strettamente legata alla presenza di un momento angolare intrinseco: in sostanza vogliamo trovare i proiettori per gli stati in cui è definito anche lo spin.

Consideriamo allora il vettore di Pauli-Lubansky, nel nostro caso, avendo preso spinori ad impulso definito, avremo che $P^\mu = k^\mu$, per cui si ottiene subito che:

$$W_\mu = -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{k^\sigma \sigma^{\nu\rho}}{mc}$$

sappiamo però che questo è un vettore ortogonale a k^μ (abbiamo visto in §2.3.7 che $W_\mu P^\mu = 0$) allora se cerchiamo un direzione per il momento angolare intrinseco possiamo prendere un versore n^ν ortogonale a k^μ e space-like, cioè tale che:

$$n \cdot n = -1 \quad (n^\mu n_\mu = 1) \quad \text{e} \quad n \cdot k = 0 \quad (n^\mu k_\mu = 0)$$

e con questo potremo caratterizzare lo spin con la proiezione lungo una qualsiasi delle direzioni che può prendere utilizzando (in maniera analoga al σ_z o al $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$ della meccanica classica) la componente:

$$W \cdot n = -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\sigma^{\nu\rho} k^\sigma n^\mu}{mc} = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} \frac{\sigma^{\nu\rho} k^\sigma n^\mu}{mc}$$

(il passaggio si fa sfruttando le proprietà del tensore di Ricci) adesso possiamo sfruttare la seconda delle (2.55) per assorbire il tensore di Ricci ottenendo che:

$$W \cdot n = \frac{i}{2}\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} \frac{n^\mu k^\nu}{mc}$$

(si è cambiato nome agli indici) consideriamo però che:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu} \quad (2.91)$$

(si sono usate la definizione di $\sigma^{\mu\nu}$ e le relazioni di anticommutazione) per cui si può riscrivere la precedente come:

$$W \cdot n = \frac{i}{2} \gamma^5 [i(\gamma^\mu \gamma^\nu - g^{\mu\nu})] \frac{n^\mu k^\nu}{mc}$$

ma adesso il termine in $g^{\mu\nu}$ ci dà $n \cdot k = 0$ per cui resta:

$$W \cdot n = -\frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} \frac{\not{k}}{mc} \quad (2.92)$$

calcoliamo allora il valore di questa proiezione su uno dei nostri spinori ad impulso definito, usando la relazione (2.76) si verifica immediatamente che:

$$\begin{aligned} (W \cdot n)u(k) &= -\frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} u(k) \\ (W \cdot n)v(k) &= \frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} v(k) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ma adesso, dato che $(W \cdot n)$ è uno scalare, lo possiamo calcolare dove ci pare, ed il risultato sarà lo stesso; allora scegliamo di fare il calcolo nel sistema solidale, e per semplificare i conti consideriamo il caso in cui n è il versore che punta lungo l'asse z , cioè sia $n = n_3 = (0, \mathbf{n}_z) = (0, 0, 0, 1)$ che è evidentemente ortogonale a $k = k^\mu = (mc, 0)$. In questo caso abbiamo visto in §2.3.7 il valore del vettore di Pauli-Lubansky è dato dalla (2.69); per cui il valore del prodotto scalare è banalmente:

$$(W \cdot n_3) = W_\mu n^\mu = (0, -\frac{1}{2} \Sigma) \cdot (0, \mathbf{n}_z) = -\Sigma_z$$

e se usiamo le espressioni (2.68) che avevamo trovato per Σ , applicandole alle soluzioni nel sistema solidale (2.77) è banale verificare che si ottiene:

$$\begin{aligned} (W \cdot n_3)u^{(\alpha)}(mc, 0) &= \frac{1}{2} (-1)^{(\alpha)} u^{(\alpha)}(mc, 0) \\ (W \cdot n_3)v^{(\alpha)}(mc, 0) &= \frac{1}{2} (-1)^{(\alpha)} v^{(\alpha)}(mc, 0) \end{aligned}$$

(dove si è usato il termine $(-1)^{(\alpha)}$ per assorbire il segno meno di Σ_z e tener conto automaticamente del cambiamento di segno al variare di α dovuto dalla definizione della matrice di Pauli σ_z) cioè le nostre soluzioni di (2.77) sono anche autostati di spin.

Ma dato che $(W \cdot n_3)$ è invariante, questa varrà anche in tutti gli altri sistemi di riferimento, in cui la particella ha impulso k generico, per cui se n è il trasformato di n_3 avremo anche che:

$$(W \cdot n)u^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{2} (-1)^{(\alpha)} u^{(\alpha)}(k) \quad (2.94a)$$

$$(W \cdot n)v^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{2} (-1)^{(\alpha)} v^{(\alpha)}(k) \quad (2.94b)$$

per cui, dal confronto di questa con la (2.93), otterremo che, se n è il versore che nel sistema di riferimento solidale è orientato lungo l'asse z , si ha:

$$\gamma^5 \not{n} u^{(\alpha)}(k) = -(-1)^{(\alpha)} u^{(\alpha)}(k) \quad (2.95a)$$

$$\gamma^5 \not{n} v^{(\alpha)}(k) = (-1)^{(\alpha)} v^{(\alpha)}(k) \quad (2.95b)$$

Con queste ultime relazioni viene naturale definire il proiettore sugli stati a spin definito come:

$$P(n) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n}) \quad (2.96)$$

dove n può anche essere un versore generico. In futuro comunque, dato che può essere usata come osservabile indipendente solo la proiezione lungo una direzione dello spin, daremo sempre per sottinteso che n è presa nella direzione che corrisponde all'asse z del sistema di riferimento solidale con la particella.

Se ci ricordiamo che i nostri spinori sono una base per lo spazio degli spinori, possiamo vedere l'effetto su di essi di questo proiettore; usando le (2.95) è immediato ottenere che:

$$P(n) : \begin{cases} P(n)u^{(1)}(k) = u^{(1)}(k) \\ P(n)u^{(2)}(k) = 0 \\ P(n)v^{(1)}(k) = 0 \\ P(n)v^{(2)}(k) = v^{(2)}(k) \end{cases} \quad (2.97a)$$

mentre è altrettanto banale verificare che:

$$P(-n) : \begin{cases} P(-n)u^{(1)}(k) = 0 \\ P(-n)u^{(2)}(k) = u^{(2)}(k) \\ P(-n)v^{(1)}(k) = v^{(1)}(k) \\ P(-n)v^{(2)}(k) = 0 \end{cases} \quad (2.97b)$$

Con queste definizioni si possono allora caratterizzare i vari spinori della nostra base in maniera alternativa come $u^{(1)}(k) = u(k, n)$, $u^{(2)}(k) = u(k, -n)$, $v^{(1)}(k) = v(k, -n)$, $v^{(2)}(k) = v(k, n)$ e talvolta si dice anche che $P(n)$ proietta sugli stati a spin up (perché quello stato ha autovalore $1/2$ per $W \cdot n$) per gli stati ad energia positiva e sugli stati a spin down per gli stati a energia negativa.

In realtà questa classificazione è impropria, infatti anche se le (2.94) ci permettono di definire quali sono gli stati di spin rispetto alla direzione z nel sistema solidale, parlare di spin up o spin down cosa non immediato perché, avendo a che fare anche con spinori a norma negativa come i $v^{(\alpha)}(k)$, gli autovalori di $W \cdot n$, non corrispondono direttamente alle osservabili fisiche. Occorre ricordare infatti che queste ultime sono date in generale dal prodotto $\bar{\psi}\mathcal{O}\psi$ (con $\mathcal{O}$ che esprime l'osservabile) perché è questa la quantità che, espresso $\mathcal{O}$ in termini dei covarianti di Dirac Γ visti in §2.3.6, trasforma correttamente.

Nel nostro caso allora $\mathcal{O} = W \cdot n$, e per $W \cdot n$ possiamo usare la (2.93). Con quella possiamo calcolare $\bar{\psi}\mathcal{O}\psi$ per ciascuno dei nostri spinori usando le (2.95). In tal caso però otterremo, dato che secondo le (2.81) è $\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\alpha)}(k) = -1$ che il valore della proiezione dello spin $W \cdot n$ è $1/2$ per $v^{(1)}(k)$ e $-1/2$ per $v^{(2)}(k)$, cioè l'opposto degli autovalori dell'operatore.

Si noti che la definizione (2.96) è in forma covariante, ed è molto più comoda perché può essere tranquillamente estesa ad un n qualunque, nel qual caso $P(n)$ sarà il proiettore sullo stato di spin orientato nella direzione tale che nel sistema solidale esso avrà $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})/2 = 1/2$.

Adesso possiamo verificare le proprietà di $P(n)$ anche per n qualsiasi; anzitutto si può dimostrarne l'idempotenza, cioè che è:

$$P(n)^2 = P(n)$$

infatti scritto esplicitamente si ha:

$$P(n)^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n})(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n}) = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + 2\gamma^5 \not{n} + (\gamma^5 \not{n})^2)$$

ma dato che le γ^μ e γ^5 anticommutano si ottiene subito che:

$$(\gamma^5 \not{n})^2 = \gamma^5 \not{n} \gamma^5 \not{n} = -\gamma^5 \gamma^5 \not{n} \not{n} = -(\gamma^5)^2 (\not{n})^2$$

ma adesso sappiamo che $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$ mentre abbiamo visto anche che $\not{n}^2 = n^2 = -1$ per cui $(\gamma^5 \not{n})^2 = \mathbb{I}$ per cui alla fine si ha:

$$P(n)^2 = \frac{1}{4}(2\mathbb{I} + 2\gamma^5 \not{n}) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n}) = P(n)$$

la seconda proprietà di questi proiettori è che sono ortogonali, cioè che:

$$P(n)P(-n) = 0$$

infatti svolgendo i conti questa diventa:

$$P(n)P(-n) = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n})(\mathbb{I} - \gamma^5 \not{n}) = \frac{1}{4}(\mathbb{I} - (\gamma^5 \not{n})^2)$$

e per quanto visto prima per cui $(\gamma^5 \not{n})^2 = \mathbb{I}$ si ottiene subito che questo è nullo; infine è assolutamente banale ottenere la proprietà di completezza, cioè che:

$$P(n) + P(-n) = \mathbb{I}$$

Le proprietà più interessanti di $P(n)$ sono comunque quelle che lo legano ai due proiettori sugli stati ad energia positiva e negativa $\Lambda_\pm(k)$; si infatti si hanno le relazioni:

$$[P(n), \Lambda_\pm(k)] = 0 \quad (2.98a)$$

$$\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(n) = \mathbb{I} \quad (2.98b)$$

$$\text{Tr} (\Lambda_\pm(k)P(\pm n)) = 1 \quad (2.98c)$$

si tratta di dimostrare queste proprietà; cominciamo dalla prima; da quanto visto sappiamo che:

$$[P(n), \Lambda_\pm(k)] = \left[\left(\frac{mc \pm \not{k}}{2mc} \right), \left(\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n}) \right) \right] = \pm \frac{1}{4mc} [\not{k}, \gamma^5 \not{n}]$$

(si sono scartati tutti i termini banalmente commutanti); adesso possiamo sfruttare la proprietà generale dei commutatori:

$$\begin{aligned} [A, BC] &= [A, B]C + B[A, C] \\ &= \{A, B\}C - B\{A, C\} \end{aligned}$$

nel nostro caso conviene usare gli anticommutatori, per cui la precedente diventa:

$$[P(n), \Lambda_\pm(k)] = \pm \frac{1}{4mc} (\{\not{k}, \gamma^5\} \not{n} - \gamma^5 \{\not{k}, \not{n}\})$$

ma γ^5 e le γ^μ anticommutano ed il primo addendo si elimina, mentre per il secondo si può considerare che:

$$\{\not{k}, \not{n}\} = k_\mu n_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2k_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = 2k \cdot n \quad (2.99)$$

che vale assolutamente in generale qualunque siano k e n , ma nel nostro caso sappiamo che $k \cdot n = 0$ per cui anche il secondo addendo della precedente si annulla e la (2.98a) è dimostrata.

La dimostrazione della (2.98b) si ottiene facilmente se usiamo le proprietà di completezza dei vari proiettori, infatti si avrà:

$$\begin{aligned} \Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(n) &= \\ \Lambda_+(k)(P(n) + P(-n)) + \Lambda_-(k)(P(n) + P(-n)) &= \\ \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Per dimostrare la (2.98c) possiamo scriverci esplicitamente la traccia come:

$$\begin{aligned}\text{Tr } (\Lambda_{\pm}(k)P(\pm n)) &= \text{Tr } \left(\frac{mc \pm \not{k}}{2mc} \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5 \not{n}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr } \mathbb{I} \pm \frac{1}{4mc} \text{Tr } \not{k} \pm \frac{1}{4} \text{Tr } \gamma^5 \not{n} \pm \frac{1}{4mc} \text{tr } \not{k} \gamma^5 \not{n}\end{aligned}$$

ma adesso $\not{k} = k_{\mu} \Gamma_V^{\mu}$ e $\gamma^5 \not{n} = n_{\mu} \Gamma_A^{\mu}$ dunque il primo ed il secondo addendo sono nulli per la proprietà 3) delle Γ (che hanno tutte, tranne $\mathbb{I}$, traccia nulla) mentre il terzo è nella forma $\Gamma_V \Gamma_A$ allora per la proprietà 4) questa è ancora una Γ diversa da $\mathbb{I}$ e quindi anche questo è a traccia nulla; resta così solo il primo addendo che dimostra banalmente la (2.98c). Allo stesso modo si può dimostrare che:

$$\text{Tr } P(\pm n) = 2$$

Adesso con questi proiettori, tenendo conto delle (2.98) si possono definire dei nuovi spinori, autostati di $P(\pm n)$ e $\Lambda_{\pm}(k)$, e base dello spazio degli spinori, che soddisfino relazioni di ortonormalità e completezza analoghe a quelle ottenute in precedenza, e questo con n direzione qualsiasi, e non il trasformato di n_3 come per gli $u^{(\alpha)}(k)$ e i $v^{(\alpha)}(k)$; detti spinori sono definiti dalle relazioni:

$$\begin{aligned}P(n)u(k, n) &= u(k, n) & \Lambda_+(k)u(k, \pm n) &= u(k, \pm n) \\ P(n)v(k, n) &= v(k, n) & \Lambda_-(k)v(k, \pm n) &= v(k, \pm n) \\ P(-n)u(k, -n) &= u(k, -n) & \\ P(-n)v(k, -n) &= v(k, -n) & \end{aligned}$$

In tutti i sistemi di riferimento c'è poi una scelta particolare n_k di n tale che la parte spaziale $\mathbf{n}$ di n è parallela alla parte spaziale $\mathbf{k}$ di k in quel riferimento; se prendiamo infatti il versore:

$$n_k = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{mc}, \frac{k_0 \mathbf{k}}{mc|\mathbf{k}|} \right)$$

si può verificare subito che:

$$n_k^2 = \frac{|\mathbf{k}|^2}{m^2 c^2} - \frac{k_0^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})}{m^2 c^2 |\mathbf{k}|^2} = \frac{1}{m^2 c^2} (|\mathbf{k}|^2 - k_0^2) = -1$$

inoltre si ha banalmente:

$$n_k \cdot k = \frac{k_0 |\mathbf{k}|}{mc} - \frac{k_0^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})}{mc |\mathbf{k}|} = \frac{k_0}{mc} \left(|\mathbf{k}| - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) = 0$$

quindi n_k soddisfa le condizioni richieste.

Con questo particolare versore n_k la polarizzazione $W \cdot n_k$ è chiamata *elicità*, ed assume un significato particolare, risultando essere la proiezione dello spin tridimensionale lungo la direzione del moto della particella; usando le definizioni date si ottiene che:

$$\begin{aligned}W \cdot n_k &= -\frac{1}{2} \gamma^5 \not{n}_k \frac{\not{k}}{mc} = -\frac{1}{2mc} \gamma^5 \left(\frac{|\mathbf{k}|}{mc} \gamma^0 - \frac{k_0}{mc|\mathbf{k}|} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right) (k_0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}) \\ &= -\frac{1}{2mc} \gamma^5 \left(\frac{k_0 |\mathbf{k}|}{mc} - \frac{k_0^2}{mc|\mathbf{k}|} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \gamma^0 - \frac{|\mathbf{k}|}{mc} \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + \frac{k_0}{mc|\mathbf{k}|} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k})^2 \right)\end{aligned}$$

adesso però, dato che $\not{k}^2 = k^2$, è immediato ottenere che $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k})^2 = -|\mathbf{k}|^2$ dunque il primo e l'ultimo termine si semplificano e raccogliendo un mc a divisore resta:

$$W \cdot n_k = -\frac{1}{2m^2 c^2} \gamma^5 \left(-\frac{k_0^2}{|\mathbf{k}|} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \gamma^0 - |\mathbf{k}| \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right) = -\frac{1}{2m^2 c^2} \gamma^5 \left(\frac{k_0^2}{|\mathbf{k}|} - |\mathbf{k}| \right) \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}$$

dove per l'ultimo passaggio si è anticommutato γ^0 e γ ; adesso si può sostituire a $k_0^2 = m^2c^2 + |\mathbf{k}|^2$ ottenendo:

$$W \cdot n_k = -\frac{1}{2m^2c^2}\gamma^5 \left(\frac{m^2c^2 + |\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|} - |\mathbf{k}| \right) \gamma^0 \gamma \mathbf{k} = -\frac{1}{2}\gamma^5 \gamma^0 \gamma \cdot \mathbf{k} \frac{1}{|\mathbf{k}|}$$

dalla quale, ricordando che $\Sigma = \gamma^5 \gamma^0 \gamma$ si ottiene la definitiva:

$$W \cdot n_k = -\frac{\Sigma \cdot \mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}$$

per cui l'elicità h , che si può definire come la proiezione dello spin sulla direzione del moto è:

$$h = \frac{\Sigma \cdot \mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} = -W \cdot n_k \quad (2.100)$$

e questa ci mostra subito che h è un invariante. Si può poi verificare immediatamente che il proiettore:

$$P(n_k) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} \pm \frac{\Sigma \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)$$

dove il segno $+$ è per le soluzioni ad energia positiva ed il segno $-$ per le soluzioni ad energia negativa) proietta sulle soluzioni ad energia positiva con elicità positiva e sulle soluzioni ad energia negativa con elicità negativa.

2.4.4 La costruzione di una soluzione generica

Abbiamo caratterizzato completamente il significato degli spinori soluzioni dell'equazione di Dirac in forma di onda piana; si tratta ora di esprimere una soluzione generale in termine di quest'ultime, e vedere cosa significano le condizioni di normalizzazione covarianti che abbiamo dato e quale significato vengono ad assumere rispetto all'interpretazione probabilistica che vorremmo dare alla conservazione della quadricorrente j^μ .

Ricordiamo che dall'equazione di continuità segue, per il teorema visto al §1.1.3, che esiste una quantità conservata che è:

$$\int \rho dV = \int \psi^\dagger \psi = \int \bar{\psi} \gamma^0 \psi$$

(l'integrale è esteso a tutto lo spazio tridimensionale) e per analogia con la meccanica classica si vuole interpretare ρ come una densità di probabilità in modo che questo integrale, con una opportuna normalizzazione, diventi una probabilità. Se poi estendiamo l'analogia possiamo definire anche un prodotto scalare sullo spazio di Hilbert degli spinori, definendo in generale:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int dV \psi_1^\dagger(x) \psi_2(x) \int dV \bar{\psi}_1(x) \gamma^0 \psi_2(x)$$

e possiamo vedere cosa comporta questo sulle soluzioni in forma d'onda piana; dobbiamo ricordarci però che in meccanica quantistica classica la normalizzazione degli autostati $|a\rangle$ nel continuo è data dalla relazione:

$$\langle a | a' \rangle = \frac{1}{\rho(a)} \delta(a - a')$$

dove $\delta(x)$ è la *delta di Dirac*, definita dalla relazione:

$$f(x) = \int dx f(x) \delta(x)$$

e $\rho(a)$ è la *densità degli stati*, cioè la funzione di normalizzazione tale che:

$$\int |a\rangle \langle a| \rho(a) da = \mathbb{I}$$

nel nostro caso le soluzioni che abbiamo scelto sono del tipo:

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} k x} u^{(\alpha)}(k) \quad (2.101a)$$

$$\psi^{(-)}(x) = e^{\frac{i}{\hbar} q x} v^{(\beta)}(q) \quad (2.101b)$$

con k , α , q e β generici; adesso possiamo calcolarci il prodotto scalare con usando la normalizzazione precedente, ottenendo:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(+)\beta} \rangle = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}(q-k)x} u^{(\alpha)\dagger}(k) u^{(\beta)}(q)$$

dalla teoria delle distribuzioni sappiamo però che la delta di Dirac si può esprimere come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ipx} = 2\pi \delta(p) \quad (2.102)$$

dalla quale segue subito (basta fare una sostituzione di variabile) anche che:

$$\delta\left(\frac{x}{a}\right) = |a| \delta(x)$$

con queste due si ottiene che:

$$\int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}(q-k)x} = e^{-\frac{i}{\hbar}(q_0-k_0)x^0} \int d^3x e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathbf{x}} = e^{-\frac{i}{\hbar}(q_0-k_0)x^0} (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k})$$

ma adesso la $\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k})$ comporta $\mathbf{q}=\mathbf{k}$, e siccome è pure $q^2=k^2=m^2c^2$ si ottiene subito che è pure:

$$k_0 = q_0 = \sqrt{m^2c^2 + |\mathbf{k}|^2} = \omega_k = \frac{E}{c}$$

(si ricordi che le componenti temporali del quadrimpulso sono sempre positive per come abbiamo scelto le soluzioni) quindi in definitiva avere una $\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k})$ impone che sia $q=k$; allora l'esponenziale restante nella precedente vale 1 e alla fine si ha:

$$\int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}(q-k)x} = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k})$$

e se applichiamo questo al prodotto scalare da cui eravamo partiti otteniamo:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(+)\beta} \rangle = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k}) u^{(\alpha)\dagger}(k) u^{(\beta)}(k) \quad (2.103)$$

(si ricordi che la $\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k})$ impone $q=k$) adesso si tratta di calcolare:

$$u^{(\alpha)\dagger}(k) v^{(\beta)}(k) = \bar{u}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 u^{(\beta)}(k)$$

per farlo dimostriamo l'identità di Gordon, che ci sarà utile anche in seguito; usando la prima delle (2.76) e la sua aggiunta si ottiene che:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) &= \bar{u}^{(\alpha)}(p) \frac{\not{p}}{mc} \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) \\ &= \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu \frac{\not{q}}{mc} u^{(\beta)}(q) \end{aligned}$$

per cui, sommando i due risultati e dividendo per due, si ottiene che:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2mc} \left[p_\nu \bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\nu \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) + q_\nu \bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu \gamma^\nu u^{(\beta)}(q) \right]$$

adesso possiamo sfruttare la (2.91) ottenendo:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^\mu u^{(\beta)}(q) &= \frac{1}{2mc} \left[p_\nu \bar{u}^{(\alpha)}(p)(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu})u^{(\beta)}(q) + q_\nu \bar{u}^{(\alpha)}(p)(g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})u^{(\beta)}(q) \right] \\ &= \frac{1}{2mc} \left[(p_\nu + q_\nu)g^{\mu\nu} \bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(q) + i(p_\nu - q_\nu)\bar{u}^{(\alpha)}(k)\sigma^{\mu\nu}u^{(\beta)}(q) \right] \end{aligned}$$

(dove si è sfruttato il fatto che $g^{\mu\nu}$ è simmetrico, mentre $\sigma^{\mu\nu}$ è antisimmetrico) da cui si ha in definitiva:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2mc} \left[(p^\mu + q^\mu)\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(q) + i(p_\nu - q_\nu)\bar{u}^{(\alpha)}(k)\sigma^{\mu\nu}u^{(\beta)}(q) \right] \quad (2.104)$$

che è appunto l'identità di Gordon. Nel caso $p = q$ questa si riduce banalmente a:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu u^{(\beta)}(p) = \frac{p^\mu}{mc} \delta_{(\alpha)}^{(\beta)}$$

(α e β sono gli indici degli spinori, non indici covarianti). Da questa si vede immediatamente che:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 u^{(\beta)}(k) = u^{(\alpha)\dagger}(k)u^{(\beta)}(k) = \frac{E}{mc^2} \delta_\alpha^\beta \quad (2.105)$$

per cui sostituendo nella (2.103) si ottiene:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(+)\beta} \rangle = \frac{E}{mc^2} (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \delta_\alpha^\beta$$

allo stesso modo se consideriamo:

$$\langle \psi_k^{(-)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}(k-q)x} \bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(q)$$

procedendo come prima si dimostra che vale un'analogia dell'identità di Gordon:

$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu v^{(\beta)}(q) = -\frac{1}{2mc} \left[(p^\mu + q^\mu)\bar{v}^{(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(q) + i(p_\nu - q_\nu)\bar{v}^{(\alpha)}(p)\sigma^{\mu\nu}v^{(\beta)}(q) \right] \quad (2.106)$$

dalla quale (usando le condizioni di normalizzazione standard) discende che, per $p = q$, si ha:

$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu v^{(\beta)}(p) = \frac{p^\mu}{mc} \delta_\alpha^\beta \quad \text{e} \quad \bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 v^{(\beta)}(k) = v^{(\alpha)\dagger}(k)v^{(\beta)}(k) = \frac{E}{mc^2} \delta_\alpha^\beta$$

per cui alla fine:

$$\langle \psi_k^{(-)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = \frac{E}{mc^2} (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \delta_\alpha^\beta$$

resta infine da vedere cos'è:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}(k+q)x} \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(q)$$

procedendo come prima si ottiene che:

$$\int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}(k+q)x} = e^{-\frac{i}{\hbar}(k_0+q_0)x^0} (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{k})$$

adesso però la delta di Dirac impone che sia $\mathbf{k} = -\mathbf{q}$ per cui è ancora $k_0 = q_0 = E/c$ ma l'esponenziale non si semplifica più inoltre adesso la $\delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{k})$ impone che se $k = (k_0, \mathbf{k})$ sia $q = (k_0, -\mathbf{k}) = \tilde{k}$ per cui alla fine:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = e^{-2\frac{i}{\hbar}k_0x^0} (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \bar{u}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(\tilde{k})$$

adesso possiamo di nuovo usare lo stesso procedimento dei casi precedenti per scriverci un altro caso dell'identità di Gordon:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu v^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2mc} \left[(p^\mu - q^\mu) \bar{u}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(q) + i(p_\nu + q_\nu) \bar{u}^{(\alpha)}(p) \sigma^{\mu\nu} v^{(\beta)}(q) \right] \quad (2.107)$$

ma, per $q = \tilde{p}$ si ha $d = p - q = (0, 2\mathbf{p})$ e $s = p + q = (2p_0, \mathbf{0})$, dunque volendo prendere la componente temporale della precedente si ha:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^0 v^{(\beta)}(\tilde{p}) = u^{(\alpha)}(p)^\dagger v^{(\beta)}(\tilde{p}) = i s_\nu \bar{u}^{(\alpha)}(p) \sigma^{0\nu} v^{(\beta)}(\tilde{p})$$

e questa è nulla dato che l'unica componente non nulla di s è quella temporale e $\sigma^{00} = 0$. Si ottiene così che:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = 0$$

e nello stesso modo si può dimostrare che anche:

$$\langle \psi_k^{(-)\alpha} | \psi_q^{(+)\beta} \rangle = 0$$

Con questi risultati possiamo scegliere la normalizzazione opportuna; l'aver preso come funzioni di stato le (2.101) che sono covarianti ci assicura che ρ è una densità di probabilità e che ρdV è invariante; infatti per quanto abbiamo visto or ora si ha:

$$\rho dV = \bar{u}(p) u(p) dV = \frac{E}{mc^2} dV$$

ma noi sappiamo che:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma mc^2 \quad \text{quindi} \quad \frac{E}{mc^2} = \gamma$$

e che

$$d^4x = c dt dV = c \gamma d\tau dV$$

quindi alla fine si ottiene:

$$d^4x = c d\tau \frac{E}{mc^2} dV$$

e dato che c , $d\tau$ e d^4x sono invarianti lo è anche $E/mc^2 dV$.

Il problema è che in questo caso non si può più avere la normalizzazione ordinaria per la quale è la densità degli stati è unitaria; in questo caso infatti, dalle relazioni ottenute, si ha che:

$$\rho(p) = (2\pi\hbar)^3 \frac{E}{mc^2}$$

per cui se vogliamo avere una normalizzazione unitaria dovremo prendere come funzioni d'onda normalizzate:

$$\begin{aligned} \psi_k^{(+)\alpha} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} e^{-\frac{i}{\hbar}kx} u^{(\alpha)}(k) \\ \psi_q^{(-)\beta} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} e^{\frac{i}{\hbar}qx} v^{(\beta)}(q) \end{aligned}$$

e per queste è immediato verificare che valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(+)\beta} \rangle &= \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ \langle \psi_k^{(-)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle &= \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ \langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle &= 0\end{aligned}$$

solo che adesso queste non sono più covarianti per via del fattore $\sqrt{\frac{mc^2}{E}}$ e ρdV non può più essere interpretato come densità di probabilità; in realtà però a noi interessa esprimere una soluzione qualsiasi $\psi(x)$ in termini di sovrapposizioni di soluzioni di onda piana; e sarà poi questa che dovrà essere normalizzata ad uno in forma covariante, ed essendo in generale la sovrapposizione composta da termini del tipo:

$$d^3k b(k, \alpha) \psi_k^{(+)} \quad \text{e} \quad d^3k d^*(k, \beta) \psi_k^{(-)}$$

se $\psi_k^{(\pm)}$ sono invarianti non possono più esserlo i fattori $b(k, \alpha)$ e $d^*(k, \beta)$ perché non lo è d^3k , mentre a noi servono coefficienti covarianti, per non avere relazioni diverse in sistemi inerziali diversi, per cui quello che vogliamo che sia invariante è il prodotto $d^3k \psi_k^{(\pm)}$.

Dimentichiamoci allora tutte le definizioni viste finora per $\psi_k^{(\pm)}$ e consideriamo uno spinore $\psi^{(+)}(x)$ generico, ma sovrapposizione solo di soluzioni ad energia positiva; con k qualunque la teoria delle trasformate di Fourier ci dice che $\psi^{(+)}(x)$ sarebbe nella forma:

$$\int d^4k \sum_{\alpha=1}^2 e^{-\frac{i}{\hbar} kx} b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k)$$

ma nel nostro caso sappiamo bene che essendo $\psi^{(+)}(x)$ soluzione dell'equazione di Dirac ci sono i due vincoli $k^2 = m^2 c^2$ e $k_0 > 0$ per questo la precedente va riscritta per tenerne conto nella forma:

$$\psi^{(+)}(x) = \int d^4k \delta(k^2 - m^2 c^2) \theta(k_0) \sum_{\alpha=1}^2 e^{-\frac{i}{\hbar} kx} b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k) \quad (2.108)$$

dove si è introdotta la funzione $\theta(t)$ definita come:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t' \geq t \\ 0 & \text{per } t' < t \end{cases} \quad (2.109)$$

e questa è ancora covariante a vista perché $\delta(k^2 - m^2 c^2)$ e $\theta(k_0)$ sono invarianti (il segno della componente temporale del quadrimpulso è invariante).

Si tratta però di capire cosa è $\delta(k^2 - m^2 c^2)$; una delle tante proprietà della delta di Dirac è che se $f(x)$ è una funzione con zeri $x_1, x_2, \dots, x_N$ allora si ha che:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

(la si può dimostrare con uno sviluppo di Taylor negli zeri); nel nostro caso allora se k è qualsiasi si ha che:

$$\delta(k^2 - m^2 c^2) = \delta(k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2 c^2)$$

quindi $f(k) = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2 c^2$ che ha come zeri:

$$k_0 = \pm \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2 c^2} = \pm \omega_k$$

e poiché evidentemente è $f(k_0) = k_0^2 - \omega_k^2$ si ha anche $f'(\pm\omega_k) = \pm\omega_k$ per cui alla fine:

$$\delta(k^2 - m^2c^2) = \frac{1}{2\omega_k}[\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)] \quad \text{e} \quad \theta(k_0)\delta(k^2 - m^2c^2) = \frac{1}{2\omega_k}\delta(k_0 - \omega_k)$$

e allora dato che $\omega_k = E/c$ la (2.108) diventa:

$$\psi^{(+)}(x) = \int d^3k \frac{c}{2E} \sum_{\alpha=1}^2 e^{-\frac{i}{\hbar}kx} b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k)$$

il che ci dice, essendo tutto il resto invariante, che d^3k/E è una misura invariante; allora volendo scrivere in generale $\psi^{(+)}(x)$ come:

$$\psi^{(+)}(x) = \int d^3k \sum_{\alpha=1}^2 e^{-\frac{i}{\hbar}kx} b(k, \alpha) \psi_k^{(+)\alpha}(x)$$

dovremo prendere dei $\psi_k^{(+)\alpha}(x)$ che contengano un fattore E^{-1} ; la scelta che di solito si fa è:

$$\psi_k^{(+)\alpha}(x) = \frac{mc^2}{E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}kx} u^{(\alpha)}(k) \quad (2.110a)$$

$$\psi_q^{(-)\beta}(x) = \frac{mc^2}{E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar}qx} v^{(\beta)}(q) \quad (2.110b)$$

perché in questo modo si ottengono delle normalizzazioni identiche e simmetriche rispetto ai fattori che inseriamo in queste definizioni, il che poi ci permetterà di definire un opportuno elemento di volume invariante $d\tilde{k}$ nello spazio dei momenti; se rifacciamo lo stesso procedimento di prima, sfruttando quanto avevamo trovato, e immediato dimostrare che si ottiene:

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(+)\beta} \rangle = \frac{mc^2}{E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \delta_{\alpha}^{\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

$$\langle \psi_k^{(-)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = \frac{mc^2}{E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \delta_{\alpha}^{\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

$$\langle \psi_k^{(+)\alpha} | \psi_q^{(-)\beta} \rangle = 0$$

così potremo esprimere gli spinori soluzioni generiche ad energia positiva e negativa nella forma:

$$\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 e^{-\frac{i}{\hbar}kx} b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k) \quad (2.111a)$$

$$\psi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 e^{\frac{i}{\hbar}kx} d^*(k, \alpha) v^{(\alpha)}(k) \quad (2.111b)$$

per cui poi in generale sarà:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b(k, \alpha) e^{-\frac{i}{\hbar}kx} u^{(\alpha)}(k) + d^*(k, \alpha) e^{\frac{i}{\hbar}kx} v^{(\alpha)}(k) \right]$$

Adesso se vogliamo vedere cosa comporta per questi la condizione di normalizzazione $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ il procedimento è analogo a quello precedente; ad esempio dalla prima delle (2.111) si ha che:

$$\langle \psi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^6} \frac{m^2 c^4}{EE'} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 b^*(p, \alpha) b(p', \alpha') e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)x} u^{(\alpha)\dagger}(p) u^{(\alpha')}(p')$$

al solito integrando su d^3x si ottiene:

$$\langle \psi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \frac{m^2 c^4}{EE'} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 b^*(p, \alpha) b(p', \alpha') u^{(\alpha)\dagger}(p) u^{(\alpha')}(p')$$

e l'integrazione su d^3p' con la delta impone anche che sia $E = E'$ e $p = p'$ per cui:

$$\langle \psi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m^2 c^4}{E^2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 b^*(p, \alpha) b(p, \alpha') u^{(\alpha)\dagger}(p) u^{(\alpha')}(p)$$

ed usando la condizione di normalizzazione per gli aggiunti riportata in (2.105) si ha:

$$\langle \psi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 |b(p, \alpha)|^2 = 1$$

esattamente nello stesso modo si può poi dimostrare che la condizione di normalizzazione per le soluzioni ad energia negativa è:

$$\langle \psi^{(-)} | \psi^{(-)} \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 |d(p, \alpha)|^2 = 1$$

nel caso generale invece le cose si complicano per la presenza di termini dove compaiono i prodotti $u^{(\alpha)}(p)^\dagger v^{(\alpha')}(\tilde{p})$ o $v^{(\alpha)}(p)^\dagger u^{(\alpha')}(\tilde{p})$ ma questi sappiamo che sono nulli per cui in definitiva quello che resta è:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 (|b(p, \alpha)|^2 + |d(p, \alpha)|^2) = 1$$

e si noti come in tutte compaia la misura invariante:

$$d\tilde{k} = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \quad (2.112)$$

2.4.5 Inconsistenze dell'equazione di Dirac

Visto tutto questo possiamo mostrare esplicitamente le inconsistenze che emergono nell'uso dell'equazione di Dirac qualora si imponga, come si riteneva di poter fare in un primo tempo, di utilizzare solo gli spinori ad energia positiva, e pacchetti d'onde composti solo da quest'ultimi. Se questo è il caso la corrente totale associata con una qualunque soluzione ad energia positiva $\psi^{(+)}(x)$ è data da:

$$\mathbf{J}^{(+)} = \int d^3x \mathbf{j}(x) = c \int d^3x \bar{\psi}^{(+)}(x) \boldsymbol{\gamma} \psi^{(+)}(x)$$

questa riscritta in termini degli spinori è:

$$\mathbf{J}^{(+)} = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^6} \frac{m^2 c^4}{EE'} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 \left[b^*(p, \alpha) b(p', \alpha') e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)x} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \boldsymbol{\gamma} u^{(\alpha')}(p') \right]$$

qui al solito si integra su d^3x per avere la delta e su d^3p per mandarla via e resta:

$$\mathbf{J}^{(+)} = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m^2 c^4}{E^2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 b^*(p, \alpha) b(p, \alpha') \bar{u}^{(\alpha)}(p) \boldsymbol{\gamma} u^{(\alpha')}(p)$$

adesso per l'ultimo fattore possiamo sfruttare quanto ricavato dall'identità di Gordon ottenendo che:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^{(+)} &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m^2 c^4}{E^2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 b^*(p, \alpha) b(p, \alpha') \frac{\mathbf{p}}{mc} \delta_{\alpha'}^{\alpha} \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 |b(p, \alpha)|^2 \frac{c\mathbf{p}}{E}\end{aligned}$$

adesso teniamo conto che, considerando $|b(p, \alpha)|^2$ come la densità di probabilità della soluzione di onda piana, la media è:

$$\left\langle \cdot \right\rangle_p^+ = \int d\tilde{p}(\cdot) \sum_{\alpha=1}^2 |b(p, \alpha)|^2 = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m^2 c^4}{E^2} (\cdot) \sum_{\alpha=1}^2 |b(p, \alpha)|^2$$

dove con questa notazione si è voluta intendere la media sul quadrimpulso p e sulle soluzioni ad energia positiva; così nel nostro caso quello che si ottiene è che:

$$\mathbf{J}^{(+)} = \left\langle \frac{c\mathbf{p}}{E} \right\rangle^+ = \langle \mathbf{v} \rangle^+$$

e quindi la corrente totale per la sovrapposizione di soluzioni ad energia positiva è proprio la velocità di gruppo. Questo è perfettamente coerente con la teoria di Schroedinger, quello che non torna è l'assunzione di poter descrivere pacchetti d'onda con la sovrapposizione di sole soluzioni ad energia positiva. Per vederlo meglio consideriamo l'evoluzione temporale di un pacchetto dato al tempo $t = 0$ da una distribuzione di Gauss di larghezza a mezza altezza d (che grosso modo rappresenta una particella localizzata entro un volume sferico di raggio d); sia cioè:

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^2}{d^2}} u^{(1)}(mc, 0)$$

questa, espressa in termini della (2.111) per $t = 0$, ci dà:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^2}{d^2}} u^{(1)}(mc, 0) &= \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b(p, \alpha) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} u^{(\alpha)}(p) + d^*(p, \beta) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} v^{(\alpha)}(p) \right]\end{aligned}$$

adesso per determinare i coefficienti moltiplichiamo per $e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}}$ ed integriamo su d^3x si ha:

$$\begin{aligned}\int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^2}{d^2}} u^{(1)}(mc, 0) &= \\ \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b(p, \alpha) e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} u^{(\alpha)}(p) + d^*(p, \beta) e^{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} v^{(\alpha)}(p) \right]\end{aligned}$$

adesso però un noto teorema delle trasformate di Fourier ci dice che:

$$\int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^2}{d^2}} = (2\pi d^2)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2 d^2}{\hbar^2}}$$

per il secondo membro poi possiamo ottenere le solite delta di Dirac, ed eliminarle attraverso l'integrazione su d^3p ; alla fine quello che resta della precedente è:

$$(4\pi d^2)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2 d^2}{\hbar^2}} u^{(1)}(mc, 0) = \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b(p, \alpha) u^{(\alpha)}(p) + d^*(\tilde{p}, \beta) v^{(\alpha)}(\tilde{p}) \right]$$

adesso queste si trattano usando la (2.105) e la analoga per v si ottiene:

$$b(p, \alpha) = (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2 d^2}{\hbar^2}} u^{(\alpha)\dagger}(p) u^{(1)}(mc, 0)$$

$$d^*(p, \beta) = (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2 d^2}{\hbar^2}} v^{(\alpha)\dagger}(p) u^{(1)}(mc, 0)$$

e da queste si vede subito che se si vuole parlare di particella localizzata sono necessarie anche le soluzioni ad energia negativa; se consideriamo poi il rapporto b/d^* si ottiene subito che (i conti sono banali):

$$\frac{b(p, \alpha)}{d^*(p, \beta)} = \frac{(mc^2 + E)}{c|\mathbf{p}|}$$

da cui si vede che d^* diventa rilevante quando $|\mathbf{p}|$ cresce fino a diventare dell'ordine di mc ; questo ci dice che se il pacchetto d'onde è sparpagliato su una distanza $d \gg \hbar/mc$ (la lunghezza d'onda Compton della particella) l'esponenziale fa sì che i termini con $|\mathbf{p}| \simeq mc$ siano fortemente depressi e le soluzioni ad energia negativa siano trascurabili; ma se si vuole localizzare la particella su una regione della stessa dimensione della sua lunghezza d'onda Compton, cioè con $d \leq \hbar/mc$ allora l'esponenziale non serve più a deprimere le soluzioni ad energia negativa, che invece diventano importanti; a questo punto allora la teoria di particella singola viene meno e ci ritrova con le solite grane.

Un altro paradosso legato alle soluzioni ad energia negativa si ritrova nel calcolo della corrente totale; non potendo fare a meno di escluderle dall'espressione di un pacchetto d'onde dovremo scriverla in generale come:

$$\mathbf{J}(t) = c \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^6} \frac{m^2 c^4}{EE'} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 \left[\left(b^*(p, \alpha) \bar{u}^{(\alpha)}(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} + d(p, \alpha) \bar{v}^{(\alpha)}(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \right) \right. \\ \left. \gamma \left(b(p', \alpha') u^{(\alpha')}(p') e^{-\frac{i}{\hbar} p' x} + d^*(p', \alpha') v^{(\alpha')}(p') e^{\frac{i}{\hbar} p' x} \right) \right]$$

qui si opera come nel caso precedente; si integra su d^3x per ottenere $\delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}')$ nei termini misti e le $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ per gli altri; queste si eliminano reintegrando su d^3p' ; in ogni caso si otterrà $E' = E$, mentre per i termini misti sarà $p' = \tilde{p}$ e negli altri $p' = p$: per questi ultimi poi potremo procedere come nel caso precedente usando le opportune identità di Gordon per cui alla fine si ottiene:

$$\mathbf{J}(t) = c \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \left\{ \frac{c\mathbf{p}}{E} \sum_{\alpha=1}^2 [|b(p, \alpha)|^2 + |d(p, \alpha)|^2] + \right. \\ \left. + \frac{mc^2}{E} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^2 \left[e^{\frac{i}{\hbar} 2Et} b(p, \alpha) d^*(\tilde{p}, \alpha') \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma v^{(\alpha')}(\tilde{p}) + e^{-\frac{i}{\hbar} 2Et} b^*(\tilde{p}, \alpha') d(p, \alpha) \bar{v}^{(\alpha)}(p) \gamma u^{(\alpha')}(\tilde{p}) \right] \right\}$$

e adesso questa dipende dal tempo con un termine oscillante dato dagli esponenziali ad una frequenza elevatissima che è:

$$\frac{2E}{\hbar} > \frac{2mc}{\hbar} \sim 2 \times 10^{21} \text{sec}^{-1}$$

2.5 L'interazione col campo elettromagnetico

Abbiamo visto alla fine dello scorso capitolo come l'equazione di Dirac presenti dei paradossi non superabili quando la si va a confrontare con i risultati che si dovrebbero ottenere considerandola come un'analogia relativistica dell'equazione di Schroedinger. Dirac però riuscì a superare buona parte di questi problemi introducendo l'antimateria grazie all'ipotesi del cosiddetto *mare di Dirac*. Prima di esaminare questa soluzione parziale però occorre introdurre l'interazione col campo elettromagnetico.

2.5.1 L'interazione minimale

Ci limiteremo per adesso ad introdurre l'interazione col campo elettromagnetico come interazione con un campo esterno, abbiamo esaminato la teoria relativistica dell'interazione di una particella col campo elettromagnetico al §1.6.1, ed abbiamo visto come per una particella di carica e in interazione con un potenziale elettromagnetico $A^\mu(x)$ il momento coniugato fosse:

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu} = mv^\mu + \frac{e}{c} A^\mu(x) = p_{\text{cin.}}^\mu + \frac{e}{c} A^\mu(x) \quad (2.113)$$

questa è la cosiddetta *interazione minimale*, ed è la forma più semplice di schematizzazione dell'interazione del campo elettromagnetico con una particella puntiforme; si noti anche che inserendo $A^\mu(x)$ come campo esterno dato si trascurano ad esempio gli effetti dovuti alla presenza della particella carica in interazione.

La (2.127) ci permette di effettuare la quantizzazione con la (2.4), ma adesso p^μ non è più l'operatore corrispondente alla quantità di moto cinetica della particella, e quindi non potremo usare la relazione $p_\mu \gamma^\mu = mc$ (che deriva dalla relazione relativistica $p^2 = m^2 c^2$) che ci aveva permesso di scrivere l'equazione di Dirac per la particella libera, però questa varrà ancora per la parte cinetica del momento coniugato, allora se prendiamo:

$$p_{\text{cin.}}^\mu = p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu(x)$$

per questo sarà ancora $p_{\text{cin.}}^\mu \gamma_\mu = mc$ e quindi potremo scrivere l'equazione di Dirac nella forma:

$$\gamma^\mu \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) \psi(x) = mc\psi(x)$$

che in forma compatta è:

$$\left(i\hbar \not{\partial} - \frac{e}{c} \not{A} - mc \right) \psi = 0 \quad (2.114)$$

L'invarianza di Lorentz di questa equazione, evidente a vista dato che $A^\mu(x)$ è un quadri-vettore, si dimostra con l'esatto identico procedimento dello scorso capitolo, dato che $A_\mu(x)$ trasforma esattamente come ∂_μ per cui in quanto visto al §2.3.2 basta sostituire a quest'ultimo $\partial_\mu - e/c A_\mu$.

Da questa poi si può ottenere l'analoga per l'aggiunto; come per l'equazione libera si prende la coniugata hermitiana della (2.128):

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial x^\mu} (\gamma^\mu)^\dagger - \frac{e}{c} \psi^\dagger(x) (\gamma^\mu)^\dagger A_\mu(x) - mc \psi^\dagger(x) = 0$$

(evidentemente $A^\mu(x)$ è reale e la coniugazione non gli fa nulla), qui si opera come al §2.3.4 usando l'espressione nota per $(\gamma^\mu)^\dagger$, e moltiplicando questa per γ^0 a destra (e cambiando segno) si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + \frac{e}{c} \bar{\psi} A_\mu \gamma^\mu + mc \bar{\psi} = 0$$

che si riscrive anche come:

$$\bar{\psi} \left(i\hbar \overleftarrow{\not{\partial}} + \frac{e}{c} \not{A} + mc \right) = 0 \quad (2.115)$$

dove con $\overleftarrow{\not{\partial}}$ si intende che le derivate devono essere applicate allo spinore a sinistra, mentre con $\not{\partial}$ intenderemo la stessa cosa ma per lo spinore a destra (cioè le derivate standard, contenute ad esempio nella (2.128)).

Con l'equazione per l'aggiunto possiamo ricavare la quadricorrente col solito procedimento, si moltiplica la (2.129) a destra per ψ e la (2.128) a sinistra per $\bar{\psi}$ e si sommano, in questo modo i termini nel potenziale e in mc se ne vanno e resta solo:

$$i\hbar (\bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} \psi + \bar{\psi} \not{\partial} \psi) = i\hbar [(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi)] = i\hbar \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

dunque si riottiene la conservazione della quadricorrente $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ che è esattamente la stessa del caso di particella libera.

Quella che invece deve essere verificata è l'invarianza di gauge, bisogna infatti ricordarsi che $A_\mu(x)$ è sempre definito a meno di una trasformazione di gauge, per cui se prendiamo un altro potenziale:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\varphi(x)$$

(con $\varphi(x)$ funzione qualsiasi) questo deve dare gli stessi risultati fisici del precedente. Usando $A'_\mu(x)$ l'equazione di Dirac diventa:

$$\left[\gamma^\mu \left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A'_\mu(x)\right) - mc\right]\psi'(x) = \left[\gamma^\mu \left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x) - \frac{e}{c}\partial_\mu\varphi(x)\right) - mc\right]\psi'(x) = 0$$

adesso si tratta di trovare $\psi'(x)$ a partire da $\psi(x)$, allora osserviamo che se prendiamo:

$$\psi'(x) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\varphi(x)} \quad (2.116)$$

si vede subito che:

$$i\hbar\partial_\mu\psi'(x) = \left(i\hbar\partial_\mu\psi(x) + \frac{e}{c}\psi(x)\partial_\mu\varphi(x)\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\varphi(x)}$$

per cui la precedente diventa:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu\psi(x) + \frac{e}{c}\psi(x)\partial_\mu\varphi(x) - \frac{e}{c}A_\mu(x)\psi(x) - \frac{e}{c}\psi(x)\partial_\mu\varphi(x)\right) - mc\psi(x)\right]e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\varphi(x)} = 0$$

che si riduce immediatamente a:

$$\left(i\hbar\cancel{\partial} - \frac{e}{c}\cancel{A} - mc\right)\psi e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\varphi(x)} = 0$$

dunque la (2.130) è ancora soluzione dell'equazione di Dirac. Inoltre è banale verificare che anche la quadricorrente è invariante giacché il fattore di fase acquisito da ψ viene annullato da quello, opposto, acquisito da $\bar{\psi}$. Questo ci dice anche, dato che tutte le quantità fisiche si possono esprimere tramite le forme bilineari del tipo $\bar{\psi}\Gamma_X\psi$ viste in §2.3.6 che l'invarianza di gauge è dimostrata in generale, e che le trasformazioni di gauge del sistema campo elettromagnetico/spinore sono date da:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\varphi(x)} \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\varphi(x) \end{cases}$$

2.5.2 La teoria di Dirac dell'antimateria

A dispetto dei suoi successi ad un certo punto Dirac dovette abbandonare la politica dello struzzo e affrontare il problema delle soluzioni ad energia negativa la cui presenza è intollerabile per i motivi visti al capitolo precedente; la soluzione che propose (ma che resta parziale, dato che per sua natura non si potrà mai applicare a dei bosoni) fu l'idea del *mare di Dirac*, cioè l'ipotesi che in natura tutti gli stati ad energia negativa siano occupati, il vuoto cioè non sarebbe più tale ma avrebbe tutti gli stati ad energia negativa pieni e così un elettrone, per il principio di esclusione di Pauli, non potrebbe mai cadere in uno di essi, ottenendo in tal modo la stabilità degli stati ad energia positiva.

Questa soluzione però ha delle conseguenze non banali, ad esempio un elettrone ad energia negativa può assorbire un radiazione ed essere eccitato in uno stato ad energia positiva, in questo caso si osserverà un elettrone di carica $-|e|$ ed energia E insieme ad un buco (*hole* o *lacuna*) nel mare ad energia negativa, che visto come l'assenza nel mare di una carica $-|e|$ ad energia $-E$

si interpreta come una carica $+|e|$ ad energia E , si prevede cioè la creazione di coppie elettrone-positrone. In maniera analoga, in presenza di una lacuna un elettrone di energia positiva può decadere in essa, rilasciando radiazione, e questo è il fenomeno dell'annichilazione.

Tutto questo sarà più chiaro nel prossimo capitolo, quando introducendo il propagatore con l'ipotesi del mare di Dirac potremo reinterpretare le soluzioni ad energia negativa come elettroni che si propagano all'indietro nel tempo, e la interpretazione in termini di materia-antimateria sarà ancora più evidente.

Adesso però, dato che la teoria predice l'esistenza di positroni ed elettroni che possono anche annichilarsi dovremo per forza abbandonare l'interpretazione dell'equazione di Dirac come equazione d'onda (superando così tutti i problemi connessi con l'interpretazione probabilistica) in quanto non si ha più a che fare con particelle singole ma con tutto un mare di particelle ad energia negativa, resterà comunque la corrente conservata j^μ e una quantità conservata che è $j^0 = c\bar{\psi}\psi$, solo che adesso questa assumerà il significato di una densità di carica, e l'equazione di conservazione esprimerà la conservazione della carica elettrica.

Questo ci mostra anche come l'equazione di Klein-Gordon non possa più essere scartata a priori, perché non importa più, venendo meno l'interpretazione probabilistica, che la quantità conservata sia definita positiva; resta il fatto che la teoria delle lacune non va affatto bene per i bosoni perché la statistica di Fermi gioca un ruolo essenziale nell'ipotesi del mare di Dirac, ma essa è comunque abbastanza strana anche per dei fermioni (ad esempio il fatto che non sia osservabile crea un bel po' di paradossi con le questioni gravitazionali); la cosa comunque può essere risolta definitivamente solo con la seconda quantizzazione, quando la teoria è intrinsecamente many-body e si avranno gli operatori di creazione e distruzione.

Il risultato più importante comunque è che con tutta questa teoria si è introdotta l'antimateria, il fatto cioè che per ogni particella deve esistere una antiparticella con la stessa massa e carica elettrica opposta; l'esistenza degli elettroni comporta cioè anche quella dei positroni (si potrebbe dire che avendo degli spinori a 4 componenti servono due particelle di spin 1/2 per riempirli). Questo comunque ci porta ad una nuova simmetria della natura, quella che scambia le particelle con le loro antiparticelle.

Vogliamo allora dimostrare che data una soluzione ψ per l'equazione di Dirac di una particella si può trovare una trasformazione che mi da la corrispondente soluzione ψ_C per la relativa antiparticella. Come quanto abbiamo dimostrato nel §2.3.2 (che data una soluzione in un sistema inerziale possiamo trovare la soluzione in un qualsiasi altro) può essere visto come una conseguenza della simmetria dell'equazione di Dirac per trasformazioni di Poincaré, così quanto ci proponiamo di dimostrare adesso può essere visto come conseguenza della succitata simmetria di carica.

Abbiamo detto che nella rappresentazione fisica del mare di Dirac una lacuna, corrispondente ad una soluzione ad energia negativa $-|E|$, equivale alla presenza di un'antiparticella di carica $+|e|$, e vogliamo costruire una corrispondenza biunivoca fra le soluzioni ad energia negativa per gli elettroni e le autofunzioni ad energia positiva per i positroni. Siccome una antiparticella appare come una particella con la stessa massa e carica elettrica opposta potremo in generale scriverci la sua equazione di Dirac ed avremo al posto della (2.128) la seguente:

$$\left(i\hbar\boldsymbol{\nabla} + \frac{e}{c}\mathcal{A} - mc\right)\psi_C = 0 \quad (2.117)$$

dove ψ_C è lo spinore che descrive il positrone; con questa l'elettrone apparirà come l'assenza di una soluzione ad energia negativa per ψ_C , e cercheremo una trasformazione che porti da ψ a ψ_C , chiedendo che sia locale (ovviamente non può dipendere dalle coordinate o perderemmo la covarianza) e che la sua riapplicazione riporti a ψ (l'antiparticella del positrone è l'elettrone) a meno del solito fattore di fase non essenziale, in quanto non osservabile.

Per farlo notiamo che la aggiunta (2.129) ha i segni dei due primi addendi corrispondenti alla (2.131); allora se la trasponiamo, per riportarci come questa ad uno spinore colonna, otterremo

che:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right) (\gamma^\mu)^t - mc \right] \bar{\psi}^t = 0$$

adesso noi cerchiamo una trasformazione C nella forma:

$$\psi_C = C\bar{\psi}^t = C\gamma^0\psi^*$$

(evidentemente $\bar{\psi}^t = (\psi^\dagger\gamma^0)^t = (\gamma^0)^t(\psi^\dagger)^t = \gamma^0\psi^*$ dato che nella nostra rappresentazione $(\gamma^0)^t = \gamma^0$ e banalmente $(\psi^\dagger)^t = ((\psi^*)^t)^t$) che sostituita nella precedente ci da:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right) (\gamma^\mu)^t - mc \right] C^{-1}\psi_C = 0$$

che moltiplicata a sinistra per C mi porta a:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right) C(\gamma^\mu)^t C^{-1} - mc \right] \psi_C = 0$$

e questa si riduce alla (2.131) se:

$$C(\gamma^\mu)^t C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (2.118a)$$

che si può anche riscrivere come:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^t \quad (2.118b)$$

adesso nella rappresentazione di Dirac è banale verificare che:

$$(\gamma^0)^t = \gamma^0 \quad (\gamma^1)^t = -\gamma^1 \quad (\gamma^2)^t = \gamma^2 \quad (\gamma^3)^t = -\gamma^3$$

da cui segue che per la (2.132b) C anticommuta con γ^0 e γ^2 e commuta con γ^1 e γ^3 ; se cerchiamo C come prodotto di due delle γ^μ usando le proprietà del commutatore si vede subito che in tal caso C non può contenere γ^1 e γ^3 ; restano così disponibili solo γ^0 e γ^2 e una possibile scelta è:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_y \\ -i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^2\gamma^0$$

ed è banale verificare con questa che:

$$C^\dagger C = CC^\dagger = \mathbb{I} \quad \text{e} \quad C^{-1} = C^t = C^\dagger = -C \quad \text{e} \quad C^2 = -\mathbb{I}$$

e si noti come in questa scelta resti una arbitrarietà nella definizione della fase, esattamente come nel caso di della parità vista al §2.3.5, per cui due coniugazioni di carica invertono il segno dello spinore; come già detto comunque la fase non è osservabile.

Tutto questo è sufficiente per essere in grado di costruire una tale matrice C in qualsiasi altra rappresentazione; sappiamo infatti che qualunque rappresentazione è equivalente alla rappresentazione di Dirac a meno di una trasformazione unitaria, allora applicando quest'ultima alla C che abbiamo appena trovato possiamo trovare la matrice appropriata per la nuova trasformazione.

Si noti infine che le (2.132) si possono riscrivere anche in termini delle $\gamma^{\mu*}$ (cosa che ci servirà in seguito); infatti:

$$(\gamma^\mu)^t = (\gamma^\mu)^{\dagger*} = (\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0)^* = \gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0$$

per cui è immediato ottenere che:

$$C\gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0 C^{-1} = -\gamma^\mu \quad \text{cioè} \quad C\gamma^0\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu C\gamma^0 \quad (2.119)$$

un'altra proprietà molto utile di C è che, come tutti i prodotti $\gamma^\mu\gamma^\nu$ commuta con γ^5 , cioè:

$$[\gamma^5, C] = 0$$

Adesso esaminiamo gli effetti di questa trasformazione, partiamo da una soluzione ad energia negativa e spin giù nel sistema solidale:

$$\psi_{(4)} = e^{imct} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la corrispondente soluzione di positrone è:

$$C\gamma^0\psi_{(4)}^* = i\gamma^2\psi_{(4)}^* = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-imct} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imct} = \psi_{(1)}$$

cioè nel sistema solidale l'assenza di una soluzione ad energia negativa e spin giù è una soluzione ad energia positiva e spin su; questo si può vedere in generale partendo da una soluzione con energia e spin definiti; prendiamo cioè:

$$\psi = \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi$$

dove ϵ indica il segno dell'energia, cioè $\epsilon = \pm 1$ e vediamo cosa diventa:

$$\psi_C = C\gamma^0\psi^* = \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right)^* \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right)^* \psi^* = \left(\frac{mc + \epsilon(\gamma^\mu)^* p_\mu}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5(\gamma^\mu)^* n_\mu}{2} \right) \psi^*$$

adesso si tratta di portare $C\gamma^0$ davanti a ψ^* per riottenere ψ_C e vedere cosa sono diventati i proiettori; per farlo cominciamo col considerare che usando la (2.133) si ha:

$$C\gamma^0 \left(\frac{mc + \epsilon(\gamma^\mu)^* p_\mu}{2mc} \right) = \left(\frac{mc - \epsilon\gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) C\gamma^0$$

dunque sostituendo nella precedente:

$$\psi_C = \left(\frac{mc - \epsilon\gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) C\gamma^0 \left(\frac{1 + \gamma^5(\gamma^\mu)^* n_\mu}{2} \right) \psi^*$$

adesso anticommutiamo γ^0 e γ^5 e successivamente commutiamo C e γ^5 , si ottiene:

$$\psi_C = \left(\frac{mc - \epsilon\gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) \left(\frac{1 - \gamma^5 C\gamma^0(\gamma^\mu)^* n_\mu}{2} \right) \psi^*$$

e qui riusando la (2.133) come prima si ottiene la definitiva:

$$\psi_C = \left(\frac{mc - \epsilon\gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \gamma^\mu n_\mu}{2} \right) C\gamma^0\psi^* = \left(\frac{mc - \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi_C$$

dunque ψ_C descrive una particella con gli stessi valori di impulso e spin, ma col segno dell'energia opposto; in termini di spinori di particella libera questo risultato si può scrivere in generale come:

$$\begin{aligned} C\bar{u}^t(p, s) &= e^{i\phi(p, s)} v(p, s) \\ C\bar{v}^t(p, s) &= e^{i\phi(p, s)} u(p, s) \end{aligned}$$

Abbiamo allora dimostrato che la trasformazione cercata esiste e pertanto esiste una nuova simmetria per l'equazione di Dirac, la *coniugazione di carica* o *charge coniugation* definita come

una trasformazione $\mathcal{C}$ che opera (in modo analogo alle trasformazioni di gauge) sia sugli spinori che sul potenziale secondo le regole:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \psi \rightarrow \psi_C = \mathcal{C}\psi = \eta_C C \bar{\psi}^t = \eta_C C \gamma^0 \psi^* \\ A^\mu \rightarrow A_C^\mu = -A^\mu \end{cases} \quad (2.120)$$

(dove si è introdotta la fase arbitraria η_C) ed il risultato è che questa trasformazione porta dall'equazione di Dirac per l'elettrone (2.128) all'equazione di Dirac per il positrone (2.131) (si noti però che per gli spinori la trasformazione $\mathcal{C}$ è antilineare, infatti $\mathcal{C}a\psi = a^*\mathcal{C}\psi$).

Il contenuto fisico della charge coniugation è che ad ogni stato fisico realizzabile che descrive un elettrone nel potenziale A^μ corrisponde uno stato fisico realizzabile per un positrone nel potenziale $-A^\mu$: che la dinamica di un elettrone in un potenziale A^μ sia esattamente la stessa di quella di un positrone in un potenziale $-A^\mu$ è ovvio anche nella teoria classica, quello che succede in questo caso, dato che $\mathcal{C}$ cambia elettroni spin up di energia positiva in positroni spin up di energia positiva trasformando soluzioni ad energia negativa della (2.128) in soluzioni ad energia positiva della (2.131) è che, attraverso la teoria delle lacune, data l'esistenza di un elettrone di massa m e carica e , deve *necessariamente* esistere anche un positrone con la stessa massa m ma carica opposta $-e$.

2.5.3 Time reversal (inversione temporale) e altre simmetrie

Al paragrafo precedente abbiamo visto come la charge coniugation venga a costituire una nuova simmetria dell'equazione di Dirac, non riconducibile né alle trasformazioni di gauge, né alle trasformazioni di Lorentz proprie. Al §2.3.5 abbiamo visto che lo stesso vale per la *parità* o riflessione spaziale P ed allora avevamo trovato che un'espressione per questa trasformazione è:

$$P\psi(t, \mathbf{x}) = \psi'(t', \mathbf{x}') = e^{i\varphi} \gamma^0 \psi(t, \mathbf{x})$$

e per le soluzioni per particella libera si può facilmente verificare (basta usare le espressioni che abbiamo trovato al §2.4) che la trasformazione inverte la direzione dell'impulso (tridimensionale) e lascia invariato lo spin, come del resto ci si aspetta anche classicamente. Questo vale in assenza di campo elettromagnetico; ma il quadripotenziale è un quadrivettore e quindi comunque una trasformazione di parità lascia invariante l'equazione di Dirac e tutte le osservabili fisiche.

Vogliamo ora dimostrare che esiste anche un'altra invarianza, l'inversione dell'asse temporale, o meglio la *time reversal*, una trasformazione impropria che a suo tempo, quando abbiamo trattato le trasformazioni improprie, avevamo tralasciato perché invertire il senso del tempo vuol dire anche invertire tutta la dinamica (corrisponde cioè ad una visione del mondo fisico come sarebbe quella di un film proiettato all'indietro).

Nel nostro caso, in cui l'interazione è elettromagnetica, invertire il senso del tempo comporta che tutte le correnti gireranno alla rovescia per cui il potenziale vettore $\mathbf{A}$ cambierà segno, mentre il potenziale scalare, che dipende solo dalle cariche, resterà identico; in definitiva dunque avremo che:

$$A'^\mu = \begin{cases} \mathbf{A}'(t') = -\mathbf{A}(t) \\ \phi'(t') = \phi(t) \end{cases} \quad \text{per} \quad t \rightarrow t' = -t \quad (2.121)$$

Per dimostrare la simmetria dobbiamo trovare la trasformazione che partendo dalle soluzioni dall'equazione ordinaria ci permette di trovare la soluzione dell'equazione di Dirac scritta per un elettrone che si propaga all'indietro nel tempo, che si ha mandando t in $-t$ e trasformando il quadripotenziale secondo la (2.135). Per farlo ci conviene scrivere l'equazione di Dirac in forma hamiltoniana; la (2.128) allora diventa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[c\boldsymbol{\alpha} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi \quad (2.122)$$

mentre se chiamiamo ψ_T lo spinore che descrive l'elettrone che si propaga all'indietro nel tempo la sua equazione di Dirac è:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_T = \left[c\boldsymbol{\alpha} \left(-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi_T \quad (2.123)$$

e adesso, in modo analogo a come per la coniugazione di carica data la soluzione di elettrone potevamo trovare quella di positrone, vogliamo trovare una trasformazione $\mathcal{T}$ che applicata alla normale soluzione della (2.136) che descrive particelle che si propagano in avanti nel tempo, ci da la soluzione della (2.137) che descrive particelle che si propagano all'indietro nel tempo.

Per risolvere la questione adottiamo un procedimento analogo a quello usato per la coniugazione di carica; come prima chiediamo che la trasformazione sia locale (ovviamente non può dipendere dalle coordinate o perderemmo la covarianza) e che la sua riapplicazione riporti a ψ , a meno del solito fattore di fase non essenziale; per trovarla notiamo anzitutto che possiamo riscrivere la (2.136) con una coniugazione complessa come:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = \left[c\boldsymbol{\alpha}^* \left(+i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta^* mc^2 + e\phi \right] \psi^*$$

e adesso se ci scriviamo:

$$\psi_T = \mathcal{T}\psi = T\psi^*$$

sostituendo nella precedente e moltiplicando a sinistra per T si ottiene:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_T = \left[c(T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1}) \left(+i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + (T\beta^*T^{-1})mc^2 + e\phi \right] \psi_T$$

che si riduce alla (2.137) con le condizioni:

$$(T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1}) = -\boldsymbol{\alpha} \quad \text{e} \quad (T\beta^*T^{-1}) = \beta \quad (2.124)$$

adesso notiamo che nella rappresentazione di Dirac si ha $\beta^* = \beta = \gamma^0$ dunque dalla seconda delle (2.138) si ottiene:

$$T\gamma^0T^{-1} = \gamma^0 \quad \text{cioè} \quad T\gamma^0 = \gamma^0T \quad (2.125a)$$

dunque T commuta con γ^0 ; adesso possiamo usare questa insieme alla prima delle (2.138) per ottenere che:

$$T\boldsymbol{\gamma}^*T^{-1} = T\beta^*\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1} = \beta^*T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1} = \beta\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\gamma}$$

e cioè:

$$T\boldsymbol{\gamma}^*T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma} \quad \text{cioè} \quad T\boldsymbol{\gamma}^* = -\boldsymbol{\gamma}T \quad (2.125b)$$

adesso, sempre nella rappresentazione di Dirac, si ha che:

$$\gamma^{1*} = -\gamma^1 \quad \gamma^{2*} = \gamma^2 \quad \gamma^{3*} = -\gamma^3$$

dunque T anticommuta con γ^1 e γ^3 mentre commuta con γ^0 e γ^2 ; allora se come per C prendiamo T nella forma di un prodotto di due γ^μ otteniamo che non può contenere né γ^0 né γ^2 ; una scelta possibile allora è:

$$T = i\gamma^1\gamma^3 \quad (2.126)$$

per cui alla fine potremo definire la trasformazione di *Time Reversal* (che in questa forma è detta *Time Reversal di Wigner*) come:

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \psi \rightarrow \psi_T = \mathcal{T}\psi = \eta_T T\psi^* = \eta_T i\gamma^1\gamma^3\psi^* \\ A^\mu = (\phi(t, \mathbf{x}), \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) \rightarrow A_T^\mu(t', \mathbf{x}') = (\phi(t, \mathbf{x}), -\mathbf{A}(t, \mathbf{x})) \\ x = (t, \mathbf{x}) \rightarrow x' = (-t, \mathbf{x}) \end{cases}$$

si noti che anche in questo caso la trasformazione è antilineare, inoltre, ragionando come per la charge coniugation, la matrice T può essere trovata dalla (2.140) anche per qualsiasi altra rappresentazione delle γ^μ .

Per vedere gli effetti di questa trasformazione, e come corrisponda anche a ciò che significa classicamente l'inversione temporale, possiamo studiare cosa succede applicando la trasformazione alle soluzioni di particella libera con momento e spin definito, ragionando come per la charge coniugation avremo che:

$$\mathcal{T}\psi = T \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}^*}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}^*}{2} \right) \psi^*$$

ma adesso dalle (2.139) è immediato ottenere che:

$$T \not{p}^* = \not{\tilde{p}} T$$

dove al solito $\tilde{p} = (p_0, -\mathbf{p})$, dunque la precedente diventa:

$$\psi_T = \left(\frac{mc + \epsilon \not{\tilde{p}}}{2mc} \right) T \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}^*}{2} \right) \psi^*$$

ma come per C anche T commuta con γ^5 , per cui si può rifare lo stesso gioco pure sull'altro termine e alla fine resta:

$$\psi_T = \left(\frac{mc + \epsilon \not{\tilde{p}}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi_T$$

quindi, come logico, l'inversione temporale inverte il segno dell'impulso e la direzione dello spin (che si ricordi è espressa dalla parte spaziale di n).

Abbiamo visto che sia $\mathcal{C}$ che $\mathcal{T}$ sono trasformazioni antilineari, è però molto interessante vedere cosa si ottiene combinando fra loro queste due e la parità P , consideriamo cioè:

$$\psi_{PCT}(x') = PCT\psi(x)$$

anzitutto è banale vedere che, dato che P inverte il segno di $\mathbf{x}$ e $\mathcal{T}$ quello di x_0 che $x' = -x$; quindi ψ_{PCT} descrive un positrone (si è fatta una coniugazione di carica) che viaggia all'indietro nello spazio-tempo rispetto all'elettrone descritto da ψ . Usando le espressioni trovate nella rappresentazione di Dirac possiamo ora calcolarci esplicitamente $\psi_{PCT}(x')$, partendo con $\mathcal{T}$ si ha:

$$\psi_{PCT}(x') = PC\eta_T T\psi^*(x) = PCi\eta_T \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x)$$

adesso possiamo applicare $\mathcal{C}$ ottenendo:

$$\psi_{PCT}(x') = PC\gamma^0 (i\eta_T \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x))^* = P(i\eta_C \gamma^2 \gamma^0) \gamma^0 (i\eta_T \gamma^1 \gamma^3)^* \psi(x)$$

ed usando anche l'espressione di P (e semplificando le due γ^0) si ha:

$$\psi_{PCT}(x') = \eta_C \eta_T^* \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^3 \psi(x)$$

che in definitiva, anticommutando γ^0 e γ^2 e scrivendo il tutto in termini di un fattore di fase inosservabile diventa:

$$\psi_{PCT}(x') = e^{i\varphi} \gamma^5 \psi(x)$$

dunque moltiplicando per γ^5 la funzione d'onda di un elettrone si ottiene quella di un positrone che si propaga all'indietro nello spazio-tempo; ci interessa poi vedere cosa succede alle soluzioni di quadrimpulso e spin definito; al solito scriviamoci:

$$\psi_{PCT}(x') = e^{i\varphi} \gamma^5 \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi(x)$$

ma dato che γ^5 anticommuta con le γ^μ si ha:

$$\gamma^5 \not{k} = -\not{k} \gamma^5$$

che vale qualunque sia k (quindi anche per $k = p, n$) per cui è banale ottenere che:

$$\psi_{PCT} = \left(\frac{mc - \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 - \gamma^5 \not{p}}{2} \right) \psi_{PCT}$$

dunque la trasformazione descrive un positrone di energia positiva che viaggia all'indietro nello spazio-tempo come un elettrone ad energia negativa e spin opposto, il che poi ci permetterà, invertendo la faccenda, di considerare un elettrone ad energia negativa che viaggia all'indietro nel tempo come un positrone ad energia positiva di spin opposto che viaggia in avanti nel tempo, con un meccanismo che è la base della teoria di Feynmann del propagatore.

Per completare la descrizione di PCT si può vedere come essa opera sul potenziale elettromagnetico, allora dato che le inversioni della parte spaziale di $\mathcal{T}$ e P si annullano resta solo la trasformazione dovuta a $\mathcal{C}$ per cui alla fine si ha:

$$PCT : \begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi_{PCT}(x') = PCT\psi(x) = e^{i\varphi} \gamma^5 \psi(x) \\ A^\mu(x) \rightarrow A_{PCT}^\mu(x') = -A^\mu(-x) \\ x \rightarrow x' = -x \end{cases}$$

2.6 L'interazione col campo elettromagnetico

Abbiamo visto alla fine dello scorso capitolo come l'equazione di Dirac presenti dei paradossi non superabili quando la si va a confrontare con i risultati che si dovrebbero ottenere considerandola come un'analogia relativistica dell'equazione di Schroedinger. Dirac però riuscì a superare buona parte di questi problemi introducendo l'antimateria grazie all'ipotesi del cosiddetto *mare di Dirac*. Prima di esaminare questa soluzione parziale però occorre introdurre l'interazione col campo elettromagnetico.

2.6.1 L'interazione minimale

Ci limiteremo per adesso ad introdurre l'interazione col campo elettromagnetico come interazione con un campo esterno, abbiamo esaminato la teoria relativistica dell'interazione di una particella col campo elettromagnetico al §1.6.1, ed abbiamo visto come per una particella di carica e in interazione con un potenziale elettromagnetico $A^\mu(x)$ il momento coniugato fosse:

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu} = mv^\mu + \frac{e}{c} A^\mu(x) = p_{\text{cin.}}^\mu + \frac{e}{c} A^\mu(x) \quad (2.127)$$

questa è la cosiddetta *interazione minimale*, ed è la forma più semplice di schematizzazione dell'interazione del campo elettromagnetico con una particella puntiforme; si noti anche che inserendo $A^\mu(x)$ come campo esterno dato si trascurano ad esempio gli effetti dovuti alla presenza della particella carica in interazione.

La (2.127) ci permette di effettuare la quantizzazione con la (2.4), ma adesso p^μ non è più l'operatore corrispondente alla quantità di moto cinetica della particella, e quindi non potremo usare la relazione $p_\mu \gamma^\mu = mc$ (che deriva dalla relazione relativistica $p^2 = m^2 c^2$) che ci aveva permesso di scrivere l'equazione di Dirac per la particella libera, però questa varrà ancora per la parte cinetica del momento coniugato, allora se prendiamo:

$$p_{\text{cin.}}^\mu = p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu(x)$$

per questo sarà ancora $p_{\text{cin.}}^\mu \gamma_\mu = mc$ e quindi potremo scrivere l'equazione di Dirac nella forma:

$$\gamma^\mu \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) \psi(x) = mc\psi(x)$$

che in forma compatta è:

$$\left(i\hbar \not{\partial} - \frac{e}{c} \not{A} - mc \right) \psi = 0 \quad (2.128)$$

L'invarianza di Lorentz di questa equazione, evidente a vista dato che $A^\mu(x)$ è un quadri-vettore, si dimostra con l'esatto identico procedimento dello scorso capitolo, dato che $A_\mu(x)$ trasforma esattamente come ∂_μ per cui in quanto visto al §2.3.2 basta sostituire a quest'ultimo $\partial_\mu - e/c A_\mu$.

Da questa poi si può ottenere l'analogia per l'aggiunto; come per l'equazione libera si prende la coniugata hermitiana della (2.128):

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial x^\mu} (\gamma^\mu)^\dagger - \frac{e}{c} \psi^\dagger(x) (\gamma^\mu)^\dagger A_\mu(x) - mc\psi^\dagger(x) = 0$$

(evidentemente $A^\mu(x)$ è reale e la coniugazione non gli fa nulla), qui si opera come al §2.3.4 usando l'espressione nota per $(\gamma^\mu)^\dagger$, e moltiplicando questa per γ^0 a destra (e cambiando segno) si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + \frac{e}{c} \bar{\psi} A_\mu \gamma^\mu + mc\bar{\psi} = 0$$

che si riscrive anche come:

$$\bar{\psi} \left(i\hbar \overleftarrow{\not{D}} + \frac{e}{c} \not{A} + mc \right) = 0 \quad (2.129)$$

dove con $\overleftarrow{\not{D}}$ si intende che le derivate devono essere applicate allo spinore a sinistra, mentre con $\not{D}$ intenderemo la stessa cosa ma per lo spinore a destra (cioè le derivate standard, contenute ad esempio nella (2.128)).

Con l'equazione per l'aggiunto possiamo ricavare la quadricorrente col solito procedimento, si moltiplica la (2.129) a destra per ψ e la (2.128) a sinistra per $\bar{\psi}$ e si sommano, in questo modo i termini nel potenziale e in mc se ne vanno e resta solo:

$$i\hbar (\bar{\psi} \overleftarrow{\not{D}}\psi + \bar{\psi} \not{D}\psi) = i\hbar [(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu \psi)] = i\hbar \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = 0$$

dunque si riottiene la conservazione della quadricorrente $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$ che è esattamente la stessa del caso di particella libera.

Quella che invece deve essere verificata è l'invarianza di gauge, bisogna infatti ricordarsi che $A_\mu(x)$ è sempre definito a meno di una trasformazione di gauge, per cui se prendiamo un altro potenziale:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x)$$

(con $\varphi(x)$ funzione qualsiasi) questo deve dare gli stessi risultati fisici del precedente. Usando $A'_\mu(x)$ l'equazione di Dirac diventa:

$$\left[\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu(x) \right) - mc \right] \psi'(x) = \left[\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(x) - \frac{e}{c} \partial_\mu \varphi(x) \right) - mc \right] \psi'(x) = 0$$

adesso si tratta di trovare $\psi'(x)$ a partire da $\psi(x)$, allora osserviamo che se prendiamo:

$$\psi'(x) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \varphi(x)} \quad (2.130)$$

si vede subito che:

$$i\hbar \partial_\mu \psi'(x) = \left(i\hbar \partial_\mu \psi(x) + \frac{e}{c} \psi(x) \partial_\mu \varphi(x) \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \varphi(x)}$$

per cui la precedente diventa:

$$\left[\left(i\hbar \partial_\mu \psi(x) + \frac{e}{c} \psi(x) \partial_\mu \varphi(x) - \frac{e}{c} A_\mu(x) \psi(x) - \frac{e}{c} \psi(x) \partial_\mu \varphi(x) \right) - mc \psi(x) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \varphi(x)} = 0$$

che si riduce immediatamente a:

$$\left(i\hbar \not{D} - \frac{e}{c} \not{A} - mc \right) \psi e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \varphi(x)} = 0$$

dunque la (2.130) è ancora soluzione dell'equazione di Dirac. Inoltre è banale verificare che anche la quadricorrente è invariante giacché il fattore di fase acquisito da ψ viene annullato da quello, opposto, acquisito da $\bar{\psi}$. Questo ci dice anche, dato che tutte le quantità fisiche si possono esprimere tramite le forme bilineari del tipo $\bar{\psi} \Gamma_X \psi$ viste in §2.3.6 che l'invarianza di gauge è dimostrata in generale, e che le trasformazioni di gauge del sistema campo elettromagnetico/spinore sono date da:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \varphi(x)} \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x) \end{cases}$$

2.6.2 La teoria di Dirac dell'antimateria

A dispetto dei suoi successi ad un certo punto Dirac dovette abbandonare la politica dello struzzo e affrontare il problema delle soluzioni ad energia negativa la cui presenza è intollerabile per i motivi visti al capitolo precedente; la soluzione che propose (ma che resta parziale, dato che per sua natura non si potrà mai applicare a dei bosoni) fu l'idea del *mare di Dirac*, cioè l'ipotesi che in natura tutti gli stati ad energia negativa siano occupati, il vuoto cioè non sarebbe più tale ma avrebbe tutti gli stati ad energia negativa pieni e così un elettrone, per il principio di esclusione di Pauli, non potrebbe mai cadere in uno di essi, ottenendo in tal modo la stabilità degli stati ad energia positiva.

Questa soluzione però ha delle conseguenze non banali, ad esempio un elettrone ad energia negativa può assorbire un radiazione ed essere eccitato in uno stato ad energia positiva, in questo caso si osserverà un elettrone di carica $-|e|$ ed energia E insieme ad un buco (*hole* o *lacuna*) nel mare ad energia negativa, che visto come l'assenza nel mare di una carica $-|e|$ ad energia $-E$ si interpreta come una carica $+|e|$ ad energia E , si prevede cioè la creazione di coppie elettrone-positrone. In maniera analoga, in presenza di una lacuna un elettrone di energia positiva può decadere in essa, rilasciando radiazione, e questo è il fenomeno dell'annichilazione.

Tutto questo sarà più chiaro nel prossimo capitolo, quando introducendo il propagatore con l'ipotesi del mare di Dirac potremo reinterpretare le soluzioni ad energia negativa come elettroni che si propagano all'indietro nel tempo, e la interpretazione in termini di materia-antimateria sarà ancora più evidente.

Adesso però, dato che la teoria predice l'esistenza di positroni ed elettroni che possono anche annichilarsi dovremo per forza abbandonare l'interpretazione dell'equazione di Dirac come equazione d'onda (superando così tutti i problemi connessi con l'interpretazione probabilistica) in quanto non si ha più a che fare con particelle singole ma con tutto un mare di particelle ad energia negativa, resterà comunque la corrente conservata j^μ e una quantità conservata che è $j^0 = c\bar{\psi}\psi$, solo che adesso questa assumerà il significato di una densità di carica, e l'equazione di conservazione esprimerà la conservazione della carica elettrica.

Questo ci mostra anche come l'equazione di Klein-Gordon non possa più essere scartata a priori, perché non importa più, venendo meno l'interpretazione probabilistica, che la quantità conservata sia definita positiva; resta il fatto che la teoria delle lacune non va affatto bene per i bosoni perché la statistica di Fermi gioca un ruolo essenziale nell'ipotesi del mare di Dirac, ma essa è comunque abbastanza strana anche per dei fermioni (ad esempio il fatto che non sia osservabile crea un bel po' di paradossi con le questioni gravitazionali); la cosa comunque può essere risolta definitivamente solo con la seconda quantizzazione, quando la teoria è intrinsecamente many-body e si avranno gli operatori di creazione e distruzione.

Il risultato più importante comunque è che con tutta questa teoria si è introdotta l'antimateria, il fatto cioè che per ogni particella deve esistere una antiparticella con la stessa massa e carica elettrica opposta; l'esistenza degli elettroni comporta cioè anche quella dei positroni (si potrebbe dire che avendo degli spinori a 4 componenti servono due particelle di spin 1/2 per riempirli). Questo comunque ci porta ad una nuova simmetria della natura, quella che scambia le particelle con le loro antiparticelle.

Vogliamo allora dimostrare che data una soluzione ψ per l'equazione di Dirac di una particella si può trovare una trasformazione che mi da la corrispondente soluzione ψ_C per la relativa antiparticella. Come quanto abbiamo dimostrato nel §2.3.2 (che data una soluzione in un sistema inerziale possiamo trovare la soluzione in un qualsiasi altro) può essere visto come una conseguenza della simmetria dell'equazione di Dirac per trasformazioni di Poincarè, così quanto ci proponiamo di dimostrare adesso può essere visto come conseguenza della succitata simmetria di carica.

Abbiamo detto che nella rappresentazione fisica del mare di Dirac una lacuna, corrispondente ad una soluzione ad energia negativa $-|E|$, equivale alla presenza di un'antiparticella di carica

$+|e|$, e vogliamo costruire una corrispondenza biunivoca fra le soluzioni ad energia negativa per gli elettroni e le autofunzioni ad energia positiva per i positroni. Siccome una antiparticella appare come una particella con la stessa massa e carica elettrica opposta potremo in generale scriverci la sua equazione di Dirac ed avremo al posto della (2.128) la seguente:

$$\left(i\hbar\boldsymbol{\nabla} + \frac{e}{c}\mathbf{A} - mc\right)\psi_C = 0 \quad (2.131)$$

dove ψ_C è lo spinore che descrive il positrone; con questa l'elettrone apparirà come l'assenza di una soluzione ad energia negativa per ψ_C , e cercheremo una trasformazione che porti da ψ a ψ_C , chiedendo che sia locale (ovviamente non può dipendere dalle coordinate o perderemmo la covarianza) e che la sua riapplicazione riporti a ψ (l'antiparticella del positrone è l'elettrone) a meno del solito fattore di fase non essenziale, in quanto non osservabile.

Per farlo notiamo che la aggiunta (2.129) ha i segni dei due primi addendi corrispondenti alla (2.131); allora se la trasponiamo, per riportarci come questa ad uno spinore colonna, otterremo che:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu\right)(\gamma^\mu)^t - mc\right]\bar{\psi}^t = 0$$

adesso noi cerchiamo una trasformazione C nella forma:

$$\psi_C = C\bar{\psi}^t = C\gamma^0\psi^*$$

(evidentemente $\bar{\psi}^t = (\psi^\dagger\gamma^0)^t = (\gamma^0)^t(\psi^\dagger)^t = \gamma^0\psi^*$ dato che nella nostra rappresentazione $(\gamma^0)^t = \gamma^0$ e banalmente $(\psi^\dagger)^t = ((\psi^*)^t)^t$) che sostituita nella precedente ci dà:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu\right)(\gamma^\mu)^t - mc\right]C^{-1}\psi_C = 0$$

che moltiplicata a sinistra per C mi porta a:

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu\right)C(\gamma^\mu)^tC^{-1} - mc\right]\psi_C = 0$$

e questa si riduce alla (2.131) se:

$$C(\gamma^\mu)^tC^{-1} = -\gamma^\mu \quad (2.132a)$$

che si può anche riscrivere come:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^t \quad (2.132b)$$

adesso nella rappresentazione di Dirac è banale verificare che:

$$(\gamma^0)^t = \gamma^0 \quad (\gamma^1)^t = -\gamma^1 \quad (\gamma^2)^t = \gamma^2 \quad (\gamma^3)^t = -\gamma^3$$

da cui segue che per la (2.132b) C anticommuta con γ^0 e γ^2 e commuta con γ^1 e γ^3 ; se cerchiamo C come prodotto di due delle γ^μ usando le proprietà del commutatore si vede subito che in tal caso C non può contenere γ^1 e γ^3 ; restano così disponibili solo γ^0 e γ^2 e una possibile scelta è:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_y \\ -i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^2\gamma^0$$

ed è banale verificare con questa che:

$$C^\dagger C = CC^\dagger = \mathbb{I} \quad \text{e} \quad C^{-1} = C^t = C^\dagger = -C \quad \text{e} \quad C^2 = -\mathbb{I}$$

e si noti come in questa scelta resti una arbitrarietà nella definizione della fase, esattamente come nel caso di della parità vista al §2.3.5, per cui due coniugazioni di carica invertono il segno dello spinore; come già detto comunque la fase non è osservabile.

Tutto questo è sufficiente per essere in grado di costruire una tale matrice C in qualsiasi altra rappresentazione; sappiamo infatti che qualunque rappresentazione è equivalente alla rappresentazione di Dirac a meno di una trasformazione unitaria, allora applicando quest'ultima alla C che abbiamo appena trovato possiamo trovare la matrice appropriata per la nuova trasformazione.

Si noti infine che le (2.132) si possono riscrivere anche in termini delle $\gamma^{\mu*}$ (cosa che ci servirà in seguito); infatti:

$$(\gamma^\mu)^t = (\gamma^\mu)^{\dagger*} = (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0)^* = \gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0$$

per cui è immediato ottenere che:

$$C\gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0C^{-1} = -\gamma^\mu \quad \text{cioè} \quad C\gamma^0\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu C\gamma^0 \quad (2.133)$$

un'altra proprietà molto utile di C è che, come tutti i prodotti $\gamma^\mu\gamma^\nu$ commuta con γ^5 , cioè:

$$[\gamma^5, C] = 0$$

Adesso esaminiamo gli effetti di questa trasformazione, partiamo da una soluzione ad energia negativa e spin giù nel sistema solidale:

$$\psi_{(4)} = e^{imct} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la corrispondente soluzione di positrone è:

$$C\gamma^0\psi_{(4)}^* = i\gamma^2\psi_{(4)}^* = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-imct} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imct} = \psi_{(1)}$$

cioè nel sistema solidale l'assenza di una soluzione ad energia negativa e spin giù è una soluzione ad energia positiva e spin su; questo si può vedere in generale partendo da una soluzione con energia e spin definiti; prendiamo cioè:

$$\psi = \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi$$

dove ϵ indica il segno dell'energia, cioè $\epsilon = \pm 1$ e vediamo cosa diventa:

$$\psi_C = C\gamma^0\psi^* = \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right)^* \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right)^* \psi^* = \left(\frac{mc + \epsilon (\gamma^\mu)^* p_\mu}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 (\gamma^\mu)^* n_\mu}{2} \right) \psi^*$$

adesso si tratta di portare $C\gamma^0$ davanti a ψ^* per riottenere ψ_C e vedere cosa sono diventati i proiettori; per farlo cominciamo col considerare che usando la (2.133) si ha:

$$C\gamma^0 \left(\frac{mc + \epsilon (\gamma^\mu)^* p_\mu}{2mc} \right) = \left(\frac{mc - \epsilon \gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) C\gamma^0$$

dunque sostituendo nella precedente:

$$\psi_C = \left(\frac{mc - \epsilon \gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) C\gamma^0 \left(\frac{1 + \gamma^5 (\gamma^\mu)^* n_\mu}{2} \right) \psi^*$$

adesso anticommutiamo γ^0 e γ^5 e successivamente commutiamo C e γ^5 , si ottiene:

$$\psi_C = \left(\frac{mc - \epsilon \gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) \left(\frac{1 - \gamma^5 C\gamma^0 (\gamma^\mu)^* n_\mu}{2} \right) \psi^*$$

e qui riusando la (2.133) come prima si ottiene la definitiva:

$$\psi_C = \left(\frac{mc - \epsilon \gamma^\mu p_\mu}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \gamma^\mu n_\mu}{2} \right) C \gamma^0 \psi^* = \left(\frac{mc - \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi_C$$

dunque ψ_C descrive una particella con gli stessi valori di impulso e spin, ma col segno dell'energia opposto; in termini di spinori di particella libera questo risultato si può scrivere in generale come:

$$\begin{aligned} C \bar{u}^t(p, s) &= e^{i\phi(p, s)} v(p, s) \\ C \bar{v}^t(p, s) &= e^{i\phi(p, s)} u(p, s) \end{aligned}$$

Abbiamo allora dimostrato che la trasformazione cercata esiste e pertanto esiste una nuova simmetria per l'equazione di Dirac, la *coniugazione di carica* o *charge coniugation* definita come una trasformazione $\mathcal{C}$ che opera (in modo analogo alle trasformazioni di gauge) sia sugli spinori che sul potenziale secondo le regole:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \psi \rightarrow \psi_C = \mathcal{C}\psi = \eta_C C \bar{\psi}^t = \eta_C C \gamma^0 \psi^* \\ A^\mu \rightarrow A_C^\mu = -A^\mu \end{cases} \quad (2.134)$$

(dove si è introdotta la fase arbitraria η_C) ed il risultato è che questa trasformazione porta dall'equazione di Dirac per l'elettrone (2.128) all'equazione di Dirac per il positrone (2.131) (si noti però che per gli spinori la trasformazione $\mathcal{C}$ è antilineare, infatti $\mathcal{C}a\psi = a^* \mathcal{C}\psi$).

Il contenuto fisico della charge coniugation è che ad ogni stato fisico realizzabile che descrive un elettrone nel potenziale A^μ corrisponde uno stato fisico realizzabile per un positrone nel potenziale $-A^\mu$: che la dinamica di un elettrone in un potenziale A^μ sia esattamente la stessa di quella di un positrone in un potenziale $-A^\mu$ è ovvio anche nella teoria classica, quello che succede in questo caso, dato che $\mathcal{C}$ cambia elettroni spin up di energia positiva in positroni spin up di energia positiva trasformando soluzioni ad energia negativa della (2.128) in soluzioni ad energia positiva della (2.131) è che, attraverso la teoria delle lacune, data l'esistenza di un elettrone di massa m e carica e , deve *necessariamente* esistere anche un positrone con la stessa massa m ma carica opposta $-e$.

2.6.3 Time reversal (inversione temporale) e altre simmetrie

Al paragrafo precedente abbiamo visto come la charge coniugation venga a costituire una nuova simmetria dell'equazione di Dirac, non riconducibile né alle trasformazioni di gauge, né alle trasformazioni di Lorentz proprie. Al §2.3.5 abbiamo visto che lo stesso vale per la *parità* o riflessione spaziale P ed allora avevamo trovato che un'espressione per questa trasformazione è:

$$P\psi(t, \mathbf{x}) = \psi'(t', \mathbf{x}') = e^{i\varphi} \gamma^0 \psi(t, \mathbf{x})$$

e per le soluzioni per particella libera si può facilmente verificare (basta usare le espressioni che abbiamo trovato al §2.4) che la trasformazione inverte la direzione dell'impulso (tridimensionale) e lascia invariato lo spin, come del resto ci si aspetta anche classicamente. Questo vale in assenza di campo elettromagnetico; ma il quadripotenziale è un quadrivettore e quindi comunque una trasformazione di parità lascia invariante l'equazione di Dirac e tutte le osservabili fisiche.

Vogliamo ora dimostrare che esiste anche un'altra invarianza, l'inversione dell'asse temporale, o meglio la *time reversal*, una trasformazione impropria che a suo tempo, quando abbiamo trattato le trasformazioni improprie, avevamo tralasciato perché invertire il senso del tempo vuol dire anche invertire tutta la dinamica (corrisponde cioè ad una visione del mondo fisico come sarebbe quella di un film proiettato all'indietro).

Nel nostro caso, in cui l'interazione è elettromagnetica, invertire il senso del tempo comporta che tutte le correnti gireranno alla rovescia per cui il potenziale vettore $\mathbf{A}$ cambierà segno, mentre

il potenziale scalare, che dipende solo dalle cariche, resterà identico; in definitiva dunque avremo che:

$$A'^\mu = \begin{cases} \mathbf{A}'(t') = -\mathbf{A}(t) \\ \phi'(t') = \phi(t) \end{cases} \quad \text{per} \quad t \rightarrow t' = -t \quad (2.135)$$

Per dimostrare la simmetria dobbiamo trovare la trasformazione che partendo dalle soluzioni dall'equazione ordinaria ci permette di trovare la soluzione dell'equazione di Dirac scritta per un elettrone che si propaga all'indietro nel tempo, che si ha mandando t in $-t$ e trasformando il quadripotenziale secondo la (2.135). Per farlo ci conviene scrivere l'equazione di Dirac in forma hamiltoniana; la (2.128) allora diventa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[c\boldsymbol{\alpha} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi \quad (2.136)$$

mentre se chiamiamo ψ_T lo spinore che descrive l'elettrone che si propaga all'indietro nel tempo la sua equazione di Dirac è:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_T = \left[c\boldsymbol{\alpha} \left(-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi_T \quad (2.137)$$

e adesso, in modo analogo a come per la coniugazione di carica data la soluzione di elettrone potevamo trovare quella di positrone, vogliamo trovare una trasformazione $\mathcal{T}$ che applicata alla normale soluzione della (2.136) che descrive particelle che si propagano in avanti nel tempo, ci dà la soluzione della (2.137) che descrive particelle che si propagano all'indietro nel tempo.

Per risolvere la questione adottiamo un procedimento analogo a quello usato per la coniugazione di carica; come prima chiediamo che la trasformazione sia locale (ovviamente non può dipendere dalle coordinate o perderemmo la covarianza) e che la sua riapplicazione riporti a ψ , a meno del solito fattore di fase non essenziale; per trovarla notiamo anzitutto che possiamo riscrivere la (2.136) con una coniugazione complessa come:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = \left[c\boldsymbol{\alpha}^* \left(+i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta^* mc^2 + e\phi \right] \psi^*$$

e adesso se ci scriviamo:

$$\psi_T = \mathcal{T}\psi = T\psi^*$$

sostituendo nella precedente e moltiplicando a sinistra per T si ottiene:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_T = \left[c(T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1}) \left(+i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + (T\beta^*T^{-1})mc^2 + e\phi \right] \psi_T$$

che si riduce alla (2.137) con le condizioni:

$$(T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1}) = -\boldsymbol{\alpha} \quad \text{e} \quad (T\beta^*T^{-1}) = \beta \quad (2.138)$$

adesso notiamo che nella rappresentazione di Dirac si ha $\beta^* = \beta = \gamma^0$ dunque dalla seconda delle (2.138) si ottiene:

$$T\gamma^0T^{-1} = \gamma^0 \quad \text{cioè} \quad T\gamma^0 = \gamma^0T \quad (2.139a)$$

dunque T commuta con γ^0 ; adesso possiamo usare questa insieme alla prima delle (2.138) per ottenere che:

$$T\boldsymbol{\gamma}^*T^{-1} = T\beta^*\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1} = \beta^*T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1} = \beta\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\gamma}$$

e cioè:

$$T\boldsymbol{\gamma}^*T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma} \quad \text{cioè} \quad T\boldsymbol{\gamma}^* = -\boldsymbol{\gamma}T \quad (2.139b)$$

adesso, sempre nella rappresentazione di Dirac, si ha che:

$$\gamma^{1*} = -\gamma^1 \quad \gamma^{2*} = \gamma^2 \quad \gamma^{3*} = -\gamma^3$$

dunque T anticommuta con γ^1 e γ^3 mentre commuta con γ^0 e γ^2 ; allora se come per C prendiamo T nella forma di un prodotto di due γ^μ otteniamo che non può contenere né γ^0 né γ^2 ; una scelta possibile allora è:

$$T = i\gamma^1\gamma^3 \quad (2.140)$$

per cui alla fine potremo definire la trasformazione di *Time Reversal* (che in questa forma è detta *Time Reversal di Wigner*) come:

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \psi \rightarrow \psi_T = \mathcal{T}\psi = \eta_T T \psi^* = \eta_T i\gamma^1\gamma^3 \psi^* \\ A^\mu = (\phi(t, \mathbf{x}), \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) \rightarrow A_T^\mu(t', \mathbf{x}') = (\phi(t, \mathbf{x}), -\mathbf{A}(t, \mathbf{x})) \\ x = (t, \mathbf{x}) \rightarrow x' = (-t, \mathbf{x}) \end{cases}$$

si noti che anche in questo caso la trasformazione è antilineare, inoltre, ragionando come per la charge coniugation, la matrice T può essere trovata dalla (2.140) anche per qualsiasi altra rappresentazione delle γ^μ .

Per vedere gli effetti di questa trasformazione, e come corrisponda anche a ciò che significa classicamente l'inversione temporale, possiamo studiare cosa succede applicando la trasformazione alle soluzioni di particella libera con momento e spin definito, ragionando come per la charge coniugation avremo che:

$$\mathcal{T}\psi = T \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}^*}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}^*}{2} \right) \psi^*$$

ma adesso dalle (2.139) è immediato ottenere che:

$$T \not{p}^* = \not{p} T$$

dove al solito $\tilde{p} = (p_0, -\mathbf{p})$, dunque la precedente diventa:

$$\psi_T = \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right) T \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi^*$$

ma come per C anche T commuta con γ^5 , per cui si può rifare lo stesso gioco pure sull'altro termine e alla fine resta:

$$\psi_T = \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{n}}{2} \right) \psi_T$$

quindi, come logico, l'inversione temporale inverte il segno dell'impulso e la direzione dello spin (che si ricordi è espressa dalla parte spaziale di n).

Abbiamo visto che sia $\mathcal{C}$ che $\mathcal{T}$ sono trasformazioni antilineari, è però molto interessante vedere cosa si ottiene combinando fra loro queste due e la parità P , consideriamo cioè:

$$\psi_{PCT}(x') = P\mathcal{C}\mathcal{T}\psi(x)$$

anzitutto è banale vedere che, dato che P inverte il segno di $\mathbf{x}$ e $\mathcal{T}$ quello di x_0 che $x' = -x$; quindi ψ_{PCT} descrive un positrone (si è fatta una coniugazione di carica) che viaggia all'indietro nello spazio-tempo rispetto all'elettrone descritto da ψ . Usando le espressioni trovate nella rappresentazione di Dirac possiamo ora calcolarci esplicitamente $\psi_{PCT}(x')$, partendo con $\mathcal{T}$ si ha:

$$\psi_{PCT}(x') = P\mathcal{C}\eta_T T \psi^*(x) = P\mathcal{C}i\eta_T \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x)$$

adesso possiamo applicare $\mathcal{C}$ ottenendo:

$$\psi_{PCT}(x') = P\mathcal{C}\gamma^0 (i\eta_T \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x))^* = P(i\eta_C \gamma^2 \gamma^0) \gamma^0 (i\eta_T \gamma^1 \gamma^3)^* \psi(x)$$

ed usando anche l'espressione di P (e semplificando le due γ^0) si ha:

$$\psi_{PCT}(x') = \eta_C \eta_T^* \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^3 \psi(x)$$

che in definitiva, anticommutando γ^0 e γ^2 e scrivendo il tutto in termini di un fattore di fase inosservabile diventa:

$$\psi_{PCT}(x') = e^{i\varphi} \gamma^5 \psi(x)$$

dunque moltiplicando per γ^5 la funzione d'onda di un elettrone si ottiene quella di un positrone che si propaga all'indietro nello spazio-tempo; ci interessa poi vedere cosa succede alle soluzioni di quadrimpulso e spin definito; al solito scriviamoci:

$$\psi_{PCT}(x') = e^{i\varphi} \gamma^5 \left(\frac{mc + \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{p}}{2} \right) \psi(x)$$

ma dato che γ^5 anticommuta con le γ^μ si ha:

$$\gamma^5 \not{p} = -\not{p} \gamma^5$$

che vale qualunque sia k (quindi anche per $k = p, n$) per cui è banale ottenere che:

$$\psi_{PCT} = \left(\frac{mc - \epsilon \not{p}}{2mc} \right) \left(\frac{1 - \gamma^5 \not{p}}{2} \right) \psi_{PCT}$$

dunque la trasformazione descrive un positrone di energia positiva che viaggia all'indietro nello spazio-tempo come un elettrone ad energia negativa e spin opposto, il che poi ci permetterà, invertendo la faccenda, di considerare un elettrone ad energia negativa che viaggia all'indietro nel tempo come un positrone ad energia positiva di spin opposto che viaggia in avanti nel tempo, con un meccanismo che è la base della teoria di Feynmann del propagatore.

Per completare la descrizione di PCT si può vedere come essa opera sul potenziale elettromagnetico, allora dato che le inversioni della parte spaziale di $\mathcal{T}$ e P si annullano resta solo la trasformazione dovuta a $\mathcal{C}$ per cui alla fine si ha:

$$PCT : \begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi_{PCT}(x') = PCT \psi(x) = e^{i\varphi} \gamma^5 \psi(x) \\ A^\mu(x) \rightarrow A_{PCT}^\mu(x') = -A^\mu(-x) \\ x \rightarrow x' = -x \end{cases}$$

Capitolo 3

Teoria del propagatore

La teoria del propagatore è un metodo di risoluzione delle equazioni differenziali nato in matematica (metodo della funzione di Green) introdotto poi nella meccanica quantistica ordinaria; è un metodo molto utile perché si presta ad una interpretazione fisica che resta valida, fatti gli opportuni cambiamenti, anche in meccanica quantistica relativistica e in teoria dei campi.

3.1 Il propagatore classico

La teoria del propagatore è stata introdotta nella meccanica quantistica classica, come modalità alternativa per trattare il problema della soluzione delle equazioni differenziali che governano le funzioni d'onda; esso però ha assunto un interesse sempre più rilevante per l'eleganza con cui permette di trattare alcuni problemi particolari.

3.1.1 Definizione ed equazioni fondamentali

Cominciamo con il richiamare brevemente la costruzione della teoria del propagatore in meccanica quantistica classica, vedremo poi (in sez. 3.2) come, con una estensione immediata e naturale, è possibile passare alla meccanica quantistica relativistica.

Nella meccanica quantistica classica l'evoluzione del moto di un sistema è governata dall'equazione di Schroedinger:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)\psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.1)$$

questa è un'equazione omogenea al primo ordine in t e sappiamo che per tali equazioni nota una soluzione qualsiasi ψ al tempo t si può determinare univocamente la soluzione al tempo t' . Si può dimostrare che questo è equivalente a dire che si può sempre scrivere:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3x G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

dove $G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ è una opportuna funzione che viene chiamata *funzione di Green*.

La funzione di Green in questa forma in genere però non viene usata, se infatti va bene per la matematica, per la fisica occorre anche tenere presente il principio di causalità. Siccome $G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ esprime la dinamica del sistema, se in H c'è una un'interazione che inizia ad un certo istante t_0 esso impone che i suoi effetti non possano essere sentiti prima dell'azione della forza; in sostanza in fisica si vuole che la (3.2) valga solo per $t' > t$; per questo si usa il *propagatore*, detto anche *funzione di Green ritardata*, definito¹ come:

$$G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \theta(t' - t)G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \begin{cases} G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) & \text{per } t' \geq t \\ 0 & \text{per } t' < t \end{cases} \quad (3.3)$$

¹la funzione $\theta(t)$ è quella definita in (2.109).

per il quale è immediato, usando la (3.2), verificare che vale la relazione:

$$\theta(t' - t)\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3x G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

e questa che è l'equazione integrale che definisce G^+ .

E' però molto più utile poter disporre di una relazione differenziale, che in genere è il punto di partenza in cui in matematica si definisce la funzione di Green, si è preferito partire dalle relazioni precedenti per far capire meglio il senso fisico di ciò di cui si sta parlando; se applichiamo l'operatore differenziale definito nell'equazione di Schroedinger alla soluzione ottenuta con il propagatore avremo:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H'\right)\theta(t' - t)\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3x \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H'\right)G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t)$$

adesso a primo membro possiamo sempre considerare che $H'\theta(t' - t) = \theta(t' - t)H'$ in quanto al più H' può essere un operatore che dipende dal tempo, non che opera sul tempo, pertanto il prodotto è comunque commutativo; pertanto se sviluppiamo otterremo:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H'\right)\theta(t' - t)\psi(\mathbf{x}', t') = \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\theta(t' - t)\right] + \theta(t' - t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H'\right)\psi(\mathbf{x}', t')$$

adesso qui il secondo addendo è nullo perché $\psi(\mathbf{x}', t')$ è soluzione della (3.1), inoltre, come già detto, e come dimostreremo in (3.17), la derivata della $\theta(t' - t)$ porta ad una delta di Dirac e quello che resta è:

$$i\hbar\delta(t' - t)\psi(\mathbf{x}', t')$$

dunque si ha:

$$i\hbar\delta(t' - t)\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3x \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t)$$

e perché questa sia verificata occorre che l'integrale ci riporti il primo membro, il che richiede che sia:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = i\hbar\delta(t' - t)\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$$

per cui in definitiva (adottiamo per semplicità la notazione $x = (\mathbf{x}, t)$) si ottiene l'equazione differenziale del propagatore:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G^+(x', x) = i\hbar\delta^4(x' - x) \quad (3.5)$$

a cui va aggiunta, per completezza, la condizione al contorno che $G^+(x', x)$ sia nullo per $t' < t$.

Fin qui nient'altro che la definizione, ma se la questione fosse solo quella di passare dalla ricerca di soluzioni della (3.1) a quelle della (3.5) avremmo ottenuto ben poco, infatti quest'ultima, essendo un'equazione non omogenea con una distribuzione, è sicuramente assai più rognosa della precedente, e la conoscenza di G^+ porta semplicemente una trattazione equivalente.

Infatti se sono note le soluzioni della (3.1) si può sempre costruire la funzione di Green. Per semplicità prendiamo una hamiltoniana time-independent e con spettro discreto;² risolvere l'equazione vuol dire trovare una base nello spazio di Hilbert delle funzioni d'onda costituita da autovettori dell'hamiltoniana H nella forma:

$$\phi_n(\mathbf{x}, t) = u_n(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \quad (3.6)$$

²questo permette di semplificare la notazione usando una base numerabile, nel caso generale si dovrebbe sommare sulle soluzioni discrete ed integrare per la parte continua, ma il risultato alla fine, sia pure con delle maggiori complicazioni dal punto di vista dei conti, sarebbe lo stesso.

dove le $u_n(\mathbf{x})$ obbediscono alle relazioni:

$$\int d^3x u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_n u_n^*(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x}) = \delta^3(x)$$

che esprimono rispettivamente le proprietà di *ortonormalità* e *completezza* della base; in questo modo una soluzione qualunque della (3.1) si potrà sempre esprimere come:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n c_n \phi_n(\mathbf{x}, t)$$

dove i c_n sono dei fattori costanti.

Allora, supposto di aver determinato le soluzioni, possiamo verificare che se prendiamo come funzione di Green l'espressione:

$$G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \sum_n u_n(\mathbf{x}')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t'} u_n^*(\mathbf{x})e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} = \sum_n u_n(\mathbf{x}')u_n^*(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)} \quad (3.7)$$

questa soddisfa, per le suddette proprietà di ortonormalità e completezza, la (3.2). Infatti avremo, sostituendo a secondo membro le espressioni (3.6) e (3.7), che:

$$\begin{aligned} & \int d^3x \sum_n u_n(\mathbf{x}')u_n^*(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)} \sum_m c_m u_m(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} \\ &= \sum_n u_n(\mathbf{x}')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)} \sum_m e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} c_m \int d^3x u_n^*(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x}) \\ &= \sum_n u_n(\mathbf{x}')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)} \sum_m e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} c_m \delta_{nm} \\ &= \sum_n c_n u_n(\mathbf{x}')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t'} = \psi(\mathbf{x}', t') \end{aligned}$$

che è appunto la (3.2).

Dalla (3.7) è immediato ottenere anche l'espressione per il propagatore, che, seguendo la definizione (3.3), è:

$$G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \begin{cases} \sum_n u_n(\mathbf{x}')u_n^*(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)} & \text{per } t' \geq t \\ 0 & \text{per } t' < t \end{cases} \quad (3.8)$$

3.1.2 Lo sviluppo perturbativo

Il vantaggio nell'uso del propagatore rispetto alla soluzione classica dell'equazione di Schroedinger sta nel fatto che esso si presta ad una trattazione molto elegante ed utile dei problemi di scattering con la teoria perturbativa, che continua a valere anche nell'estensione relativistica.

Se infatti conosciamo la soluzione di un problema semplice di hamiltoniana H_0 , per il quale il propagatore G_0^+ è noto,³ una volta che aggiungiamo una interazione $V(x)$ avremo per G^+ l'equazione:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0 - V \right) G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = i\hbar \delta(t' - t) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (3.9)$$

con la condizione al contorno che sia $G^+(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = 0$ se $t' < t$. Quello che si ottiene è che una soluzione di questa equazione si può sempre scrivere nella forma (adottando una volta per tutte la notazione quadrivettoriale):

$$G^+(x_2; x_1) = G_0^+(x_2; x_1) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \int d^4x_3 G_0^+(x_2; x_3) V(x_3) G^+(x_3; x_1) \quad (3.10)$$

³basta costruirlo usando la (3.8).

Per dimostrarlo possiamo sfruttare un teorema che dice che equazioni come la (3.9) hanno una soluzione unica; allora se verifichiamo che effettivamente la (3.10) la soddisfa e soddisfa pure la condizione al contorno siamo a posto; applichiamo allora a quest'ultima la parte imperturbata dell'operatore differenziale; otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) G^+(x_2; x_1) &= i\hbar \delta^4(x_2 - x_1) + \\ &\quad \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int d^4x_3 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) G_0^+(x_2; x_3) V(x_3) G^+(x_3; x_1) \\ &= i\hbar \delta^4(x_2 - x_1) + \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int d^4x_3 [i\hbar \delta^4(x_2 - x_3)] V(x_3) G^+(x_3; x_1) \end{aligned}$$

dove si è usata la definizione di G_0^+ ; da questa è immediato ottenere:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) G^+(x_2; x_1) = i\hbar \delta^4(x_2 - x_1) + V(x_2) G^+(x_2; x_1)$$

che è banalmente la (3.9); adesso resta da vedere la condizione al contorno; se $t_2 < t_1$ ovviamente $G_0^+(x_2; x_1) = 0$ per cui resta:

$$G^+(x_2; x_1) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int d^4x_3 G_0^+(x_2; x_3) V(x_3) G^+(x_3; x_1)$$

qui non è detto che sia sempre $G_0^+(x_2; x_3) = 0$ dato che può essere $t_2 > t_3$, ma è evidente che se prendiamo $G^+(x_2; x_1) = 0$ per $t_2 < t_1$ questa equazione è soddisfatta (dato che per $t_2 > t_3$ è nulla G^+ poiché $t_3 < t_2 < t_1$ e per il resto è nulla G_0). Quindi $G^+(x_2; x_1) = 0$ per $t_2 > t_1$ è una soluzione possibile e dato che tutto è consistente e la soluzione è unica siamo a posto.

La (3.10) è la formula fondamentale che permette di sviluppare con la teoria del propagatore il calcolo perturbativo; infatti utilizzandola per $G^+(x_2; x_1)$ dentro l'integrale a secondo membro si ottiene:

$$\begin{aligned} G^+(x_2; x_1) &= G_0^+(x_2; x_1) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int d^4x_3 G_0^+(x_2; x_3) V(x_3) G_0^+(x_3; x_1) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 G_0^+(x_2; x_3) V(x_3) G_0^+(x_3; x_4) V(x_4) G^+(x_4; x_1) \end{aligned}$$

ed allora, iterando la sostituzione, si può ottenere:

$$\begin{aligned} G^+(x'; x) &= G_0^+(x'; x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \\ &\quad G_0^+(x'; x_1) V(x_1) G_0^+(x_1; x_2) V(x_2) \cdots V(x_{n-1}) G_0^+(x_{n-1}; x_n) V(x_n) G_0^+(x_n; x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

che è lo sviluppo perturbativo che cercavamo.

Questa ultima formula ha una interessante interpretazione in termini che assomigliano a quelli che in modo più elaborato saranno i diagrammi di Feynmann; se guardiamo in fig. 3.1 tenendo presente la (3.11) possiamo vedere come si costruisca il propagatore esatto come somma dei vari termini in approssimazioni successive; il primo è banalmente il propagatore libero che porta direttamente da $x_i = (\mathbf{x}_i, t_i)$ a $x_f = (\mathbf{x}_f, t_f)$ senza considerare l'interazione; il secondo è la prima correzione che si costruisce con una propagazione libera fino al punto intermedio $x_1 = (\mathbf{x}_1, t_1)$ dove si aggiunge l'interazione col potenziale per poi proseguire col propagatore libero fino al punto finale, integrando su tutti i possibili punti intermedi. Allo stesso modo, usando due interazioni intermedie, si effettua la correzione del secondo ordine, e analogamente per i termini successivi; si noti poi che l'uso del propagatore G^+ ci evita di dover imporre nelle integrazioni che i tempi siano posti in sequenza crescente, come nella figura, per tener conto della causalità.

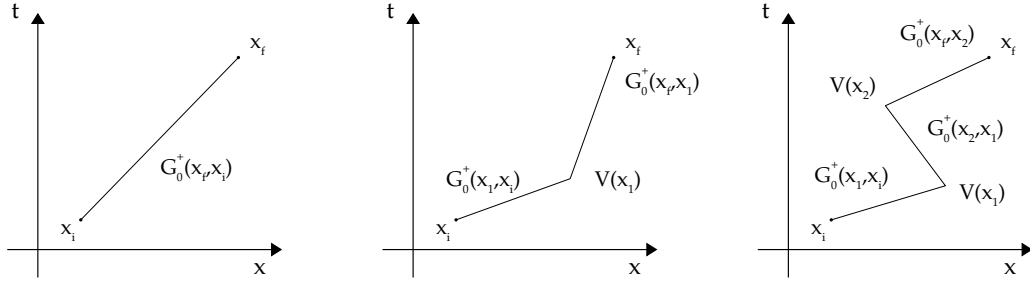


Figura 3.1: Interpretazione fisica dello sviluppo perturbativo del propagatore, in termini di somme su propagazioni libere e interazioni; in figura sono rappresentati i primi tre termini (si noti come i tempi siano ordinati in modo crescente).

3.1.3 La trasformata di Fourier del propagatore

La soluzione dell'equazione differenziale per il propagatore è in genere più semplice se si usano le trasformate di Fourier, in tal caso infatti le equazioni che contengono operatori di derivazione possono essere trasformate in semplici equazioni algebriche.

Il primo passo da fare è osservare che siccome tutti i problemi fisici di una qualche rilevanza presentano invarianza di traslazione, il propagatore quindi non sarà mai funzione di x_1 e x_2 separatamente, ma solo della differenza $x_1 - x_2$. Questo ci permette di scriverne la trasformata di Fourier in maniera assolutamente generale come:

$$G^+(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} G^+(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1)} \quad (3.12)$$

nel caso dell'equazione di Schroedinger per una particella libera l'equazione che otteniamo è:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right) G_0^+(x_2 - x_1) = i\hbar \delta^4(x_2 - x_1)$$

adesso possiamo usare la rappresentazione della delta di Dirac:

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \quad (3.13)$$

per cui la precedente diventa:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} G_0^+(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} e^{-\frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1)}$$

dalla quale, portando le derivate dentro l'integrale, si ottiene⁴ l'equazione algebrica:

$$G_0^+(p) \left(\omega - \frac{p^2}{2m} \right) = 1$$

questo ci mostra che per $\omega \neq p^2/2m$ si ha:

$$G_0^+(p) = \frac{1}{\omega - \frac{p^2}{2m}} \quad (3.14)$$

il problema che sorge qui è che questa è ovviamente una funzione singolare; d'altra parte per $G_0^+(x_1 - x_2)$ non si ha solo l'equazione (3.5), ma anche la condizione al contorno che sia G_0^+ nulla per $t_2 < t_1$; allora è il comportamento nella singolarità che ci darà l'andamento delle condizioni al contorno.

⁴basta integrare su $d^4 x$ e cancellare le delta che vengono fuori con l'altra integrazione su $d^4 p$

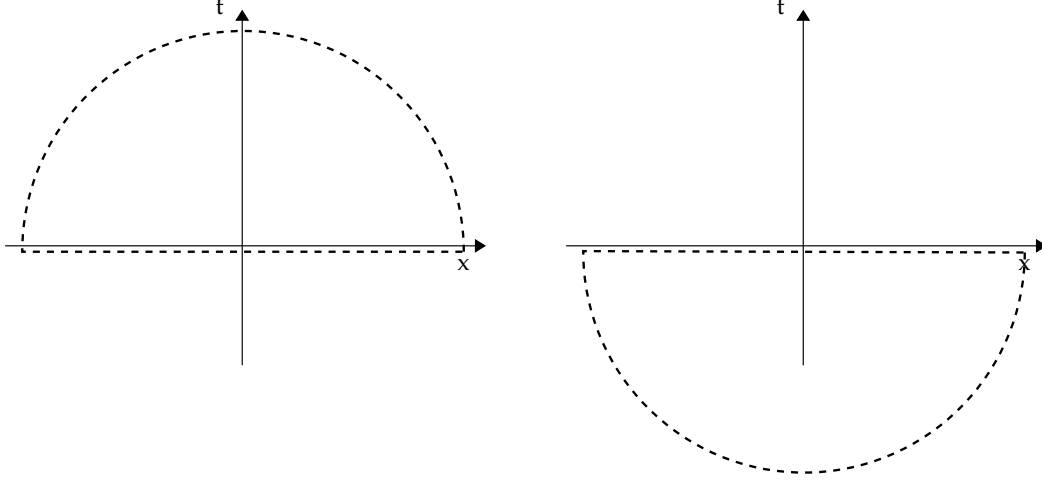


Figura 3.2: I due cammini su cui si applica il Lemma di Jordan per il calcolo dell'integrale del propagatore $G_0^+(x)$ usando l'espressione (3.15) di $G_0^+(p)$ nello spazio degli impulsi.

Il trucco per risolvere il problema, che permette integrare la (3.12) con questa espressione singolare per $G_0^+(p)$ ed ottenere al contempo le condizioni al contorno, è quello di aggiungere a denominatore della $G_0^+(p)$ una quantità complessa infinitesimale $i\epsilon$ che sposta il polo dall'asse reale e permette di calcolare l'integrale; esprimeremo cioè il propagatore nello spazio degli impulsi come:

$$G_0^+(p) = \frac{1}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} \quad (3.15)$$

(dove si è sottinteso un $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ da aggiungere a questa espressione tutte le volte che la si integra) con la quale l'equazione per il propagatore diventa:

$$G_0^+(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi\hbar} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(t_2 - t_1)}}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon}$$

per questo integrale possiamo usare il lemma di Jordan, calcolando l'integrale su un cammino chiuso nel piano complesso. Per farlo consideriamo i due cammini illustrati in fig. 3.2, costituiti dall'asse reale chiuso da un semicerchio all'infinito. Adesso se $t_2 < t_1$ l'esponenziale va a zero per $\text{Im } \omega > 0$, quindi usando il cammino chiuso nel semipiano superiore, che non contiene poli, otterremo che il risultato, per il teorema dei residui, è zero. Se viceversa $t_2 > t_1$ perché l'esponenziale si annulli deve essere $\text{Im } \omega < 0$ e dobbiamo usare il cammino chiuso nel semipiano inferiore; si ottiene così che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi\hbar} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(t_2 - t_1)}}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} = -2\pi i \text{Res} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(t_2 - t_1)}}{\omega - \frac{p^2}{2m}}$$

(essendo il cammino che da l'integrale in senso antiorario si è cambiato segno); questo si risolve banalmente tenendo conto che per poli del primo ordine come questo si ha che:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

dunque:

$$\text{Res}_{\omega=p^2/2m} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(t_2 - t_1)}}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} = \lim_{\omega \rightarrow p^2/2m} \left(\omega - \frac{p^2}{2m} \right) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(t_2 - t_1)}}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} = \lim_{\omega \rightarrow p^2/2m} e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(t_2 - t_1)} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_2 - t_1)}$$

per cui alla fine si ottiene che:

$$G_0^+(x_2 - x_1) = -i\theta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t_2 - t_1)}$$

e se consideriamo che le soluzioni per l'equazione di Schroedinger di particella libera sono:

$$\phi_p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}$$

si vede subito che questa è proprio nella forma⁵ della (3.8).

Come si vede la prescrizione di aggiungere un $i\epsilon$ al denominatore dell'espressione (3.15) ci permette di ottenere la condizione al contorno che volevamo, questo è quanto ci aspettiamo se consideriamo che una delle possibili definizioni della funzione θ è:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon} \quad (3.16)$$

che, calcolando l'integrale con lo stesso procedimento appena mostrato per $G_0^+(p)$, che ha esattamente la stessa forma, ci dà la definizione vista in (2.109).

Da questa definizione si ottiene anche la relazione $\theta'(t) = \delta(t)$ usata per dimostrare la (3.5) all'inizio del capitolo, basta osservare infatti che:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{d}{dt}\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega i\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} = \delta(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove si è effettuato l'ultimo passaggio semplificando $\omega + i\epsilon$ con ω .

3.2 Il propagatore in meccanica quantistica relativistica

Fino ad ora tutti i ragionamenti sono stati fatti con la meccanica quantistica classica; ma è immediato notare che sia la (3.5), sostituito l'operatore differenziale preso dall'equazione di Schroedinger con l'analogo relativistico, che la (3.10) sono espresse in una forma che è covariante a vista; l'estensione al caso relativistico sembra quindi immediata.

3.2.1 Il propagatore libero per l'equazione di Dirac

Cominciamo allora con l'equazione di Dirac per una particella libera potremo scrivere l'equazione, potremo allora esprimere l'equazione per il propagatore libero S come:

$$(i\hbar\partial_2 - mc)S(x_2; x_1) = i\hbar\delta^4(x_2 - x_1) \quad (3.18)$$

e se estendiamo i risultati del paragrafo precedente prendendo una funzione di Green del tipo della (3.8) costruita utilizzando le soluzioni di particella libera per l'equazione di Dirac avremo (discretizziamo per semplicità):

$$S(x'; x) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} u_n(\mathbf{x}') u_n^*(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t' - t)} + \sum_{E_n < 0} v_n(\mathbf{x}') v_n^*(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t' - t)} & \text{per } t' \geq t \\ 0 & \text{per } t' < t \end{cases}$$

⁵ovviamente si deve sostituire alla sommatoria, usata per le soluzioni discrete, un integrale, avendo a che fare con soluzioni continue.

e si è diviso in due la somma sulle soluzioni dato che abbiamo visto che in questo caso abbiamo a che fare anche con soluzioni ad energia negativa: qui nascono le grane poiché questo propagatore non è più compatibile con l'ipotesi del mare di Dirac, dato che la seconda parte propaga stati ad energia negativa che dovrebbero essere tutti occupati; a questo però si può rimediare cambiando le condizioni al contorno; si noti infatti gli addendi del secondo termine sono tutti soluzioni dell'equazione di Dirac omogenea, per cui, dato che $S(x'; x)$ è sempre definito a meno di una tale soluzione (che viene fissata solo dalle condizioni al contorno) possono essere sottratti in blocco; eliminando il problema della propagazione delle soluzioni ad energia negativa; il punto però è che questa sottrazione va fatta a tutto il propagatore a tutti i tempi, non solo per $t' \geq t$, per cui quello che si ottiene è:

$$S_F(x'; x) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} u_n(\mathbf{x}') u_n^*(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t'-t)} & \text{per } t' \geq t \\ - \sum_{E_n < 0} v_n(\mathbf{x}') v_n^*(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t'-t)} & \text{per } t' < t \end{cases} \quad (3.19)$$

così per $t' \geq t$ non si ha più propagazione di stati ad energia negativa, ma ce la ritroviamo per $t' < t$.

Tutto questo sembrerebbe un rimedio peggiore del male, dato che adesso andiamo a propagare roba all'indietro nel tempo; ma se ci ricordiamo di quanto abbiamo visto in §2.6.2 per la coniugazione di carica ci si rende immediatamente conto che invece abbiamo di fronte un risultato estremamente utile che ha una elegante interpretazione fisica; infatti il propagarsi all'indietro nel tempo di una particella ad energia negativa, dal punto di vista di chi come noi vede comunque il tempo scorrere in avanti è assolutamente equivalente al propagarsi in avanti nel tempo di una particella con energia opposta (cioè positiva) e carica opposta (cioè un'antiparticella); questo ci permette di risolvere tutta la questione, senza problemi di causalità, considerando il secondo pezzo del propagatore come la parte dovuta alla propagazione in avanti nel tempo delle lacune.

Quello che succede allora è che col propagatore di Dirac non ci sarà più l'ordinamento per tempi crescenti e potremo avere entrambe le situazioni riportate in fig. 3.3. La prima si interpreta come prima, un elettrone si propaga fino a x_1 dove interagisce e viene diffuso fino a x_2 dove interagisce di nuovo per arrivare ad x_f ; la seconda invece si può interpretare nei termini di un elettrone che arriva fino a x_2 dove interagisce annichilandosi nel potenziale con un positrone proveniente da x_1 (così si interpreta la linea che va all'indietro nel tempo) che era stato creato lì dall'interazione del potenziale, insieme ad un altro elettrone il quale arriva ad x_f .

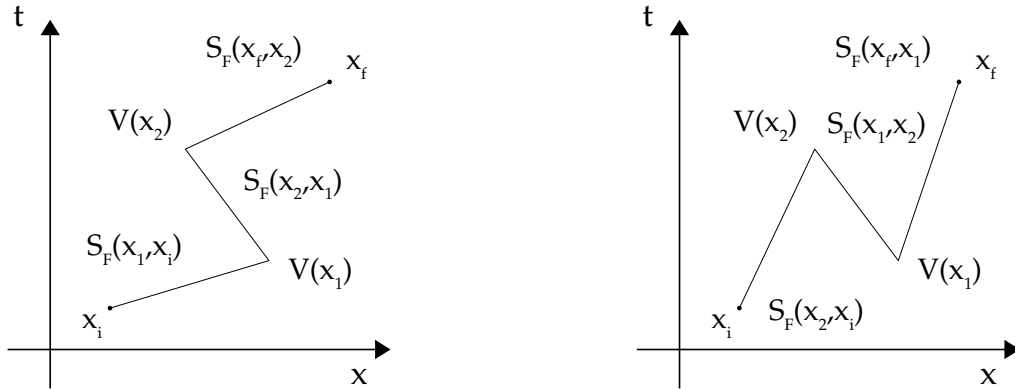


Figura 3.3: I due casi che si possono avere col propagatore dell'equazione di Dirac, dove viene a mancare l'ordinamento per tempi crescenti.

3.2.2 La prescrizione di Feynmann

Quanto abbiamo appena visto ci dice che per come è messa la struttura dell'equazione di Dirac, la presenza delle soluzioni ad energia negativa unita all'ipotesi del mare di Dirac ci costringe a cambiare le condizioni al contorno che adesso non sono più, come nel caso classico, che esso sia nullo per tempi antecedenti per evitare problemi di causalità, ma che esso propaghi in avanti nel tempo solo soluzioni ad energia positiva, ed indietro nel tempo solo soluzioni ad energia negativa.

Adesso possiamo vedere come questa condizione (detta anche *prescrizione di Feynmann*) si esprime nel calcolo dell'espressione del propagatore libero che si effettua usando le trasformate di Fourier. Il punto di partenza è la (3.18), che essendo invariante per traslazione ci permette di considerare che $S(x'; x) = S(x' - x)$ per cui potremo espanderlo con le trasformate di Fourier come funzione di $x_2 - x_1$. Adesso per semplificare le equazioni introdurremo da qui in avanti le unità di misura *naturali*, le unità cioè per le quali vale $\hbar = c = 1$; scriveremo così:

$$S(x_2 - x_1) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip(x_2 - x_1)} \quad (3.20)$$

e dovremo ricordarci alla fine di rimettere tutti gli $\hbar$ ed i c necessari per far tornare le dimensioni.

Adesso possiamo procedere come al paragrafo precedente usando la (3.18); otterremo l'equazione per il propagatore:

$$(i\not{D}_2 - m) \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip(x_2 - x_1)} = i \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_2 - x_1)}$$

che portando le derivate sotto l'integrale ci da:

$$\int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} (\not{D} - m) S(p) e^{-ip(x_2 - x_1)} = i \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_2 - x_1)}$$

da cui si ottiene l'equazione algebrica:

$$(\not{D} - m) S(p) = i \mathbb{I}$$

(si ricordi che ovviamente in questo caso $S(x_2 - x_1)$ è una matrice 4×4) adesso qui si può fare una divisione formale per $(\not{D} - m)$, intesa nel senso di moltiplicare per la matrice inversa, questa però è una matrice singolare, per vedere allora cosa viene fuori, senza stare a complicarsi la vita con l'inversione delle matrici, notiamo che se moltiplichiamo questa per $(\not{D} + m)$ si ha:

$$(\not{D} + m)(\not{D} - m) S(p) = (p^2 - m^2) S(p) = i(\not{D} + m)$$

e adesso si può fare una semplice divisione numerica, ottenendo che, per $p^2 \neq m^2$, si ha:

$$S(p) = i \frac{(\not{D} + m)}{(p^2 - m^2)} = i \frac{(\not{D} + m)}{(p - m)(p + m)}$$

Adesso come prima occorre stabilire cosa succede per $p^2 \rightarrow m^2$ assegnando le condizioni al contorno, solo che adesso i poli sono due e corrispondono ai due possibili valori dell'energia:

$$p_0 = \omega = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E$$

e se utilizziamo questa possiamo scrivere l'espressione della trasformata di Fourier in (3.20), spezzando ancora l'integrale, come:

$$\begin{aligned} S(x_2 - x_1) &= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{(\not{D} + m) e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \\ &= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{(\not{D} + m) e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E)(p_0 + E)} \end{aligned}$$

anche qui è possibile imporre che il propagatore propaghi solo in avanti nel tempo sostituendo a p_0 la quantità $p_0 + i\epsilon$ in modo che entrambi i poli si spostino appena sotto l'asse reale e sopravviva solo la parte con $t_2 \geq t_1$; avremo così la funzione di Green ritardata per l'equazione di Dirac data da:

$$\begin{aligned} S^+(x_2 - x_1) &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{(\not{p} + m)e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \\ &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{(\not{p} + m)e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 + i\epsilon)^2 - E^2} \end{aligned}$$

solo che stavolta per la fisica non ci interessa questa, quanto il propagatore di Feynmann $S_F(x_2 - x_1)$ che propaga in avanti nel tempo le soluzioni ad energia positiva ed indietro quelle ad energia negativa; questo si può ottenere se aggiungiamo $i\epsilon$ al polo ad energia positiva e $-i\epsilon$ a quello ad energia negativa; prenderemo cioè:

$$S_F(x_2 - x_1) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{(\not{p} + m)e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)}$$

in questo caso si può verificare banalmente che il lemma di Jordan farà sopravvivere solo la parte ad energia positiva per $t_2 \geq t_1$ e quella ad energia negativa per $t_2 < t_1$.

Per eseguire il calcolo conviene usare al posto di $S(x_2 - x_1)$, che è una matrice, la funzione di Green $G(x_2 - x_1)$ dell'equazione di Klein-Gordon definita da:

$$(\square + m^2)G(x_2 - x_1) = -i\delta^4(x_2 - x_1) \quad (3.21)$$

con questa è banale verificare che se prendiamo:

$$S(x_2 - x_1) = (i\not{\partial}_2 + m)G(x_2 - x_1) \quad (3.22)$$

otteniamo una soluzione della (3.18); d'altra parte risolvendo la (3.21) con le trasformate di Fourier si ottiene l'equazione algebrica (basta eseguire i conti e semplificare un segno meno):

$$(p^2 - m^2)G(p) = i$$

per cui poi ci si ritrova con una funzione con le stesse singolarità di $S(x_2 - x_1)$, e che quindi possiamo trattare allo stesso modo, per cui potremo ottenere la soluzione con le corrette condizioni al contorno come:

$$G_F(x_2 - x_1) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)}$$

Adesso cominciamo col caso $t_2 \geq t_1$; in tal caso per usare il lemma di Jordan dovremo chiudere l'integrale con un semicerchio all'infinito per $\text{Im } p_0 < 0$ ed essendo in tal caso l'integrale sulla retta reale all'inverso rispetto al senso antiorario otterremo:

$$G_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \text{Res}_{p_0=E-i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} \quad \text{per } t_2 \geq t_1$$

(si è semplificato un $1/2\pi$ nell'integrale col $-i2\pi$ che viene dal lemma di Jordan) adesso il calcolo del residuo è immediato:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p_0=E-i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} &= \lim_{p_0 \rightarrow E-i\epsilon} (p_0 - E + i\epsilon) \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} \\ &= \frac{e^{-iE(t_2 - t_1)}}{2E} \end{aligned}$$

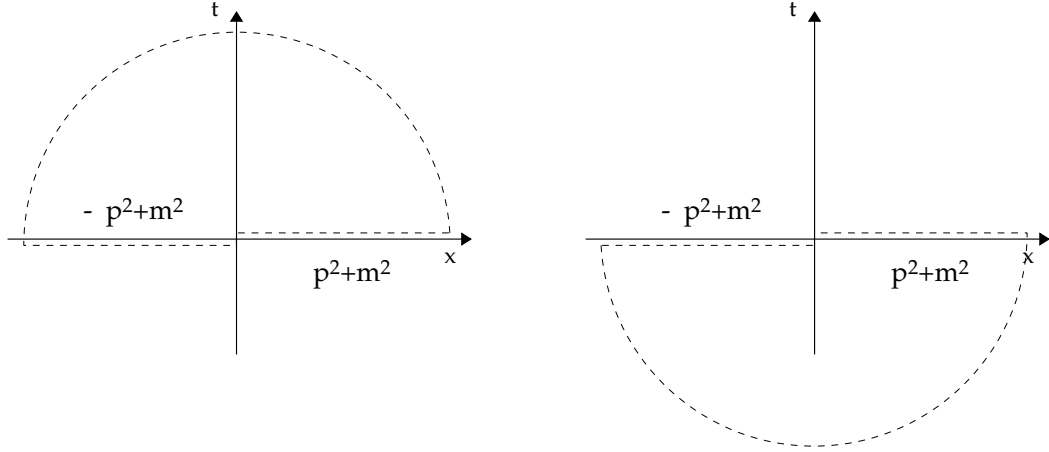


Figura 3.4: I due cammini su cui si applica il Lemma di Jordan per il calcolo dell'integrale del propagatore con la prescrizione di Feynmann.

per cui alla fine si ottiene che:

$$G_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \frac{e^{-iE(t_2 - t_1)}}{2E} \quad \text{per} \quad t_2 \geq t_1$$

se poi consideriamo il caso $t_2 < t_1$ dobbiamo chiudere l'integrale nel semipiano $\text{Im } p_0 < 0$, ed otterremo:

$$G_F(x_2 - x_1) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \text{Res}_{p_0 = -E} \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} \quad \text{per} \quad t_2 < t_1$$

(il segno è opposto perché l'integrale sulla retta reale è nel senso giusto) ed il residuo stavolta è:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p_0 = -E + i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} &= \lim_{p_0 \rightarrow -E + i\epsilon} (p_0 + E - i\epsilon) \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} \\ &= - \frac{e^{iE(t_2 - t_1)}}{2E} \end{aligned}$$

per cui si ottiene che:

$$G_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \frac{e^{-iE(t_2 - t_1)}}{2E} \quad \text{per} \quad t_2 < t_1$$

per cui alla fine, unendo i due termini, si ha la definitiva:

$$G_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \left[\theta(t_2 - t_1) e^{-iE(t_2 - t_1)} + \theta(t_1 - t_2) e^{iE(t_2 - t_1)} \right]$$

che vale per tempi qualsiasi.

Si noti che questa espressione soddisfa le condizioni al contorno richieste, dato che per $t_2 \geq t_1$ si propagano solo energia positive, mentre per $t_2 < t_1$ si propagano solo energia negative; si noti anche come nell'integrale compaia una misura invariante proporzionale (manca m) alla $d\tilde{k}$ già menzionata nel §2.4.4 in (2.112). Considerato questo l'espressione precedente può essere espressa in forma covariante a vista; infatti l'integrazione su d^3p non cambia se mandiamo $\mathbf{p}$ in $-\mathbf{p}$, per cui se lo facciamo per il secondo addendo in parentesi quadra si ottiene:

$$\begin{aligned} G_F(x_2 - x_1) &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left[\theta(t_2 - t_1) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{-iE(t_2 - t_1)} + \theta(t_1 - t_2) e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{iE(t_2 - t_1)} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left[\theta(t_2 - t_1) e^{-ip(x_2 - x_1)} + \theta(t_1 - t_2) e^{ip(x_2 - x_1)} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

che è covariante a vista.

Adesso possiamo passare a $S_F(x_2 - x_1)$ usando l'espressione (3.23) di $G_F(x_2 - x_1)$ appena trovata, e la relazione (3.22); si ottiene subito che:

$$\begin{aligned} S_F(x_2 - x_1) &= (i\cancel{\partial}_2 + m)G_F(x_2 - x_1) \\ &= (i\cancel{\partial}_2 + m) \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left[\theta(t_2 - t_1)e^{-ip(x_2 - x_1)} + \theta(t_1 - t_2)e^{ip(x_2 - x_1)} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left[\theta(t_2 - t_1)(m + \cancel{p})e^{-ip(x_2 - x_1)} + \theta(t_1 - t_2)(m - \cancel{p})e^{ip(x_2 - x_1)} \right] \end{aligned}$$

che banalmente si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} S_F(x_2 - x_1) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2m}{2E} \left[\theta(t_2 - t_1) \frac{(m + \cancel{p})}{2m} e^{-ip(x_2 - x_1)} + \theta(t_1 - t_2) \frac{(m - \cancel{p})}{2m} e^{ip(x_2 - x_1)} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left[\theta(t_2 - t_1) \Lambda_+(p) e^{-ip(x_2 - x_1)} + \theta(t_1 - t_2) \Lambda_-(p) e^{ip(x_2 - x_1)} \right] \end{aligned}$$

dove $\Lambda_+(p)$ e $\Lambda_-(p)$ sono i proiettori sugli stati ad energia positiva e negativa visti in (2.89) al §2.4.3; da questa, usando le espressioni alternative dei proiettori in termini degli spinori di (2.88), si ha:

$$\begin{aligned} S_F(x_2 - x_1) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left[\theta(t_2 - t_1) \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) e^{-ip(x_2 - x_1)} \right. \\ &\quad \left. - \theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(p) \bar{v}^{(\alpha)}(p) e^{ip(x_2 - x_1)} \right] \end{aligned}$$

che, usando le espressioni (2.110) per le autofunzioni normalizzate dell'equazione di Dirac libera, diventa subito:

$$\begin{aligned} S_F(x_2 - x_1) &= \theta(t_2 - t_1) \int d^3p \sum_{\alpha=1}^2 \psi_p^{(+)\alpha}(x_2) \bar{\psi}_p^{(+)\alpha}(x_1) \\ &\quad - \theta(t_1 - t_2) \int d^3p \sum_{\alpha=1}^2 \psi_p^{(-)\alpha}(x_2) \bar{\psi}_p^{(-)\alpha}(x_1) \end{aligned}$$

che è esattamente la forma della (3.19).

3.2.3 Le equazioni di propagazione per gli spinori

Adesso ci resta da vedere come dall'espressione del propagatore che abbiamo ottenuto si costruiscono gli spinori in un qualunque x_2 noti in x_1 ; in questo caso la presenza di energie negative e di una metrica pseudoeuclidea non ci permette di riutilizzare banalmente la formula trovata per il caso classico; per ottenere l'espressione che ci serve definiamo:

$$F^\mu = S_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1)$$

e calcoliamoci:

$$i \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} F^\mu = \left[i \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} S_F(x_2 - x_1) \right] \gamma^\mu \psi(x_1) + S_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1^\mu}$$

adesso per il secondo addendo si può usare l'equazione di Dirac, ottenendo così:

$$i \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} F^\mu = [S_F(x_2 - x_1) (i \cancel{\partial}_1 + m)] \psi(x_1) \quad (3.24)$$

e si tratta ora di valutare il termine in parentesi quadra; per farlo usiamo la coniugata della (3.18) che è:

$$S_F(x_2 - x_1)^\dagger \left[-i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_2 - m \right] = -i\delta^4(x_2 - x_1)$$

dove la freccia sopra l'operatore di derivazione sta ad indicare che la derivata viene fatta sulla quantità a sinistra, mentre le γ_μ di $\not{\partial}$ restano a destra. In § 2.3.1 abbiamo visto che l'espressione (2.21) per $(\gamma^\mu)^\dagger$ per cui, semplificato il segno, questa diventa:

$$S_F(x_2 - x_1)^\dagger \gamma^0 \left[i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_2 + m \right] \gamma^0 = i\delta^4(x_2 - x_1)$$

che moltiplicata a destra e a sinistra per γ^0 ci da:

$$\gamma^0 S_F(x_2 - x_1)^\dagger \gamma^0 \left[i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_2 + m \right] = i\delta^4(x_2 - x_1) \quad (3.25)$$

dunque definito l'aggiunto del propagatore:

$$\bar{S}_F(x_2 - x_1) = \gamma^0 S_F(x_2 - x_1)^\dagger \gamma^0 \quad (3.26)$$

per il quale vale l'aggiunta della (3.18):

$$\bar{S}_F(x_2 - x_1) \left[i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_2 + m \right] = i\delta^4(x_2 - x_1) \quad (3.27)$$

a noi però è più utile la (3.25); calcoliamoci perciò $S_F(x_2 - x_1)^\dagger$ usando l'espressione con le trasformate di Fourier:

$$S_F(x_2 - x_1)^\dagger = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} S_F^\dagger(p) e^{ip(x_2 - x_1)}$$

ma evidentemente:

$$\begin{aligned} S_F^\dagger(p) &= \left(i \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \right)^\dagger = -i \frac{(\not{p}^\dagger + m)}{(p^2 - m^2)} \\ &= -i\gamma^0 \left(i \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \right) \gamma^0 = -\gamma^0 S_F(p) \gamma^0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

quindi tornando alla precedente:

$$\begin{aligned} S_F(x_2 - x_1)^\dagger &= \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} S_F^\dagger(p) e^{ip(x_2 - x_1)} = - \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \gamma^0 S_F(p) \gamma^0 e^{ip(x_2 - x_1)} \\ &= -\gamma^0 \left(\int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} \right) \gamma^0 \\ &= -\gamma^0 S_F(x_1 - x_2) \gamma^0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

adesso possiamo sostituire questa nella (3.25) ottenendo:

$$-\gamma^0 \gamma^0 S_F(x_1 - x_2) \gamma^0 \gamma^0 \left[i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_2 + m \right] = -S_F(x_1 - x_2) \left[i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_2 + m \right] = i\delta^4(x_2 - x_1)$$

ma evidentemente le variabili si possono chiamare come ci pare per cui questa, considerato che la $\delta^4(x_2 - x_1)$ è simmetrica nello scambio delle variabili, ci dice che:

$$S_F(x_2 - x_1) \left[i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_1 + m \right] = -i\delta^4(x_2 - x_1) \quad (3.30)$$

con questa si può sostituire nella (3.24) ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} F^\mu = -\delta^4(x_2 - x_1) \psi(x_1)$$

dove si è semplificato il fattore i che compare in entrambi i membri.

Adesso con questa si può ottenere immediatamente $\psi(x_2)$ avendo cura di integrare x_1 su un ipervolume V che contenga x_2 e sfruttando la $\delta^4(x_2 - x_1)$; si ha così:

$$\psi(x_2) = - \int_V d^4x_1 \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} [S_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1)]$$

qui si può applicare il teorema di Gauss e questa diventa:

$$\psi(x_2) = - \int_S d\sigma(x_1) \eta_\mu(x_1) [S_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1)]$$

dove S è l'ipersuperficie che contorna V ed $\eta_\mu(x)$ il versore normale esterna; per fare il conto si prende come ipervolume quello delimitato da due ipersuperfici a tempo t_1 costante; la condizione che l'ipervolume contenga x_2 è allora $t_1'' > t_2 > t_1'$, ed i due versori normale esterna sono allora:

$$\eta_\mu(t_1'') = (1, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad \eta_\mu(t_1') = (-1, \mathbf{0})$$

mentre banalmente $d\sigma(x_1) = d^3x_1$ per cui la precedente diventa:

$$\psi(x_2) = - \int_{t_1=t_1'' > t_2} d^3x_1 S_F(x_2 - x_1) \gamma^0 \psi(x_1) + \int_{t_1=t_1' < t_2} d^3x_1 S_F(x_2 - x_1) \gamma^0 \psi(x_1) \quad (3.31)$$

Questa però ci dà due integrali e non è affatto chiaro che cosa significhi, dato che il primo è relativo ad una propagazione all'indietro nel tempo ed il secondo ad una propagazione in avanti, senza una correlazione chiara col tempo t_1 che è quello da cui vorremmo partire.

Tutto questo accade perché si è considerata una propagazione generica, con t_1 che può essere sia prima che dopo t_2 , e con soluzioni generiche; la prescrizione di Feynmann però ci dice che sono consentite solo propagazioni in avanti nel tempo di soluzioni ad energia positiva e all'indietro nel tempo di soluzioni ad energia negativa; vedremo allora che con questa condizione le cose diventano molto più chiare.

Per semplicità considereremo solo il caso di soluzioni ad energia positiva che si propagano in avanti nel tempo; sarà cioè $t_2 > t_1$ e $\psi(x_1) = \psi^{(+)}(x_1)$; in questo caso nell'integrazione della (3.31) potremo considerare $t_1'' = t_2 + \epsilon$ con ϵ infinitesimo e $t_1' = t_1$: vogliamo dimostrare che in questo caso il primo integrale si annulla e resta solo:

$$\psi^{(+)}(x_2) = \int d^3x_1 S_F(x_2 - x_1) \gamma^0 \psi^{(+)}(x_1) \quad \text{per} \quad t_2 > t_1 \quad (3.32)$$

che è la formula voluta; calcoliamo dunque con l'espressione ottenuta per il propagatore:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1=t_2+\epsilon} d^3x_1 S_F(x_2 - x_1) \gamma^0 \psi^{(+)}(x_1) \\ &= \int d^3x_1 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \Lambda_-(p) e^{ip(x_2-x_1)} \gamma^0 \psi^{(+)}(x_1) \\ &= \int d^3x_1 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} e^{iE\epsilon} \frac{(m - \not{p})}{2m} \gamma^0 \psi^{(+)}(x_1) \end{aligned}$$

(dato che $t_1 > t_2$ resta solo questo pezzo del propagatore) adesso possiamo commutare la γ^0 con $\not{p}$ ottenendo $\not{p}$ (con $\tilde{p} = (p_0, -\mathbf{p})$) ed al contempo riassorbire il cambiamento di segno di $\mathbf{p}$ con un cambiamento di variabile nell'integrazione su d^3p , per cui alla fine la precedente si riduce a:

$$\int d^3x_1 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} e^{iE\epsilon} \gamma^0 \frac{(m - \not{p})}{2m} \psi^{(+)}(x_1)$$

adesso si tratta di usare lo sviluppo di Fourier della $\psi^{(+)}(x_1)$ che sostituito qui da:

$$\int d^3x_1 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{iE\epsilon} \gamma^0 \Lambda_-(p) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E'}\right)^{1/2} \sum_{\alpha=1}^2 b(p', \alpha) e^{-\frac{i}{\hbar} p' x_1} u^{(\alpha)}(p')$$

ed evidenziando la dipendenza da $\mathbf{x}_1$ che sono le coordinate su cui si andrà ad integrare di ottiene:

$$\int d^3x_1 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E'}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{iE\epsilon} \gamma^0 \Lambda_-(p) e^{-iE'(t_2 + \epsilon)} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{x}_1} \left[\sum_{\alpha=1}^2 b(p', \alpha) u^{(\alpha)}(p') \right]$$

adesso questa, raccogliendo i termini in $\mathbf{x}_1$ e riordinando i termini si può riscrivere come:

$$\int d^3p \frac{m}{E} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}_2} \gamma^0 \Lambda_-(p) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E'}\right)^{1/2} e^{-iE't_2} e^{i\epsilon(E - E')} \left[\sum_{\alpha=1}^2 b(p', \alpha) u^{(\alpha)}(p') \right] \int \frac{d^3x_1}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{x}_1}$$

e qui integrando su d^3x_1 si ottiene una $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ che integrata su d^3p' impone $p' = p$ (compreso $E' = E$) per cui questa diventa:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E}\right)^{3/2} e^{-iEt_2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}_2} \gamma^0 \Lambda_-(p) \left[\sum_{\alpha=1}^2 b(p, \alpha) u^{(\alpha)}(p) \right]$$

e questa, dato che $\Lambda_-(p)$ va ad operare sugli $u^{(\alpha)}(p)$, è nulla, come volevasi dimostrare.

Con lo stesso procedimento si può ottenere una formula simile alla (3.32) per soluzioni ad energia negativa che si propagano all'indietro nel tempo; sarà cioè:

$$\psi^{(-)}(x_2) = - \int d^3x_1 S_F(x_2 - x_1) \gamma^0 \psi^{(-)}(x_1) \quad \text{per} \quad t_2 < t_1 \quad (3.33)$$

Da queste due relazioni si possono poi ottenere anche le equazioni per gli spinori aggiunti; al solito esamineremo solo il caso delle soluzioni ad energia positiva, cominciamo col prendere la coniugata hermitiana della (3.32), otteniamo:

$$\psi^\dagger(x_2) = \int d^3x_1 \psi^\dagger(x_1) \gamma^0 S_F^\dagger(x_2 - x_1) = \int d^3x_1 \bar{\psi}(x_1) S_F^\dagger(x_2 - x_1)$$

ma adesso si può sfruttare la (3.29) ottenendo:

$$\psi^\dagger(x_2) = - \int d^3x_1 \bar{\psi}(x_1) \gamma^0 S_F(x_2 - x_1) \gamma^0$$

da cui, moltiplicando a destra per γ^0 si ha la definitiva:

$$\bar{\psi}^{(+)}(x_2) = - \int d^3x_1 \bar{\psi}^{(+)}(x_1) \gamma^0 S_F(x_2 - x_1) \quad \text{per} \quad t_2 > t_1$$

e allo stesso modo si ottiene l'analoga:

$$\bar{\psi}^{(-)}(x_2) = \int d^3x_1 \bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma^0 S_F(x_2 - x_1) \quad \text{per} \quad t_2 < t_1$$

3.2.4 Il propagatore esatto

Adesso possiamo passare al caso in cui ci sia interazione; per semplicità considereremo solo il caso di interazione minimale col campo elettromagnetico, in questo caso il propagatore esatto viene definito dall'equazione:

$$(i\partial_2 - e\mathcal{A} - m)S_A(x_2; x_1) = i\delta^4(x_2 - x_1) \quad (3.34)$$

e da questa si può ottenere un'espressione ricorsiva per $S_A(x_2; x_1)$ nello stesso identico modo con cui abbiamo ottenuto la (3.10) nel caso non relativistico, per cui se $S_F(x_2 - x_1)$ è il propagatore libero (quello che abbiamo trattato nel paragrafo precedente) il propagatore esatto sarà dato da:

$$S_A(x_2; x_1) = S_F(x_2 - x_1) - ie \int d^3x_3 S_F(x_2 - x_3) \mathcal{A}(x_3) S_A(x_3; x_1) \quad (3.35)$$

per verificarlo basta applicare a questa espressione l'operatore differenziale $(i\partial_2 - m)$ e sfruttando la definizione del propagatore libero si è immediato ricondursi alla (3.34). Da questa espressione si può poi ottenere lo sviluppo perturbativo esattamente come visto in §3.1.2:

$$\begin{aligned} S_A(x'; x) &= S_F(x' - x) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (-ie)^i \int d^4x_1 \cdots d^4x_n S_F(x' - x_1) \mathcal{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \mathcal{A}(x_2) \cdots \\ &\cdots \mathcal{A}(x_{n-1}) S_F(x_{n-1} - x_n) \mathcal{A}(x_n) S_F(x_n - x) \end{aligned} \quad (3.36)$$

e con quest'ultima si possono studiare le proprietà del propagatore esatto; ad esempio con la (3.29) si può dimostrare una relazione analoga per $S_A(x'; x)$; se infatti prendiamo la coniugata della (3.36) e usiamo la (3.29) si ha:

$$\begin{aligned} S_A^\dagger(x'; x) &= S_F^\dagger(x' - x) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (ie)^i \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \\ &\quad \left[S_F^\dagger(x' - x_1) \mathcal{A}^\dagger(x_1) S_F^\dagger(x_1 - x_2) \cdots S_F^\dagger(x_{n-1} - x_n) \mathcal{A}^\dagger(x_n) S_F^\dagger(x_n - x) \right] \\ &= -\gamma^0 S_F(x' - x) \gamma^0 + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (ie)^i (-1)^{n+1} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \\ &\quad \left[\gamma^0 S_F(x' - x_1) \gamma^0 \mathcal{A}(x_1) \gamma^0 S_F(x_1 - x_2) \gamma^0 \mathcal{A}(x_2) \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots \mathcal{A}(x_{n-1}) \gamma^0 S_F(x_{n-1} - x_n) \gamma^0 \mathcal{A}(x_n) \gamma^0 S_F(x_n; x) \right] \end{aligned}$$

(il $(-1)^{n+1}$ viene usando la (3.29) per tutti gli $S_F^\dagger(x' - x)$ contenuti $n+1$ volte nell' n -simo termine) qui al solito $\mathcal{A}^\dagger(x) = \gamma^0 \mathcal{A}(x) \gamma^0$ e in questa tutte le γ^0 interne si semplificano, lasciandone solo due agli estremi, questo ci permette di scrivere immediatamente:

$$\begin{aligned} S_A^\dagger(x'; x) &= -\gamma^0 \left[S_F^\dagger(x' - x) + \sum_{i=1}^{\infty} [(-ie)^i \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \right. \\ &\quad \left. S_F(x' - x_1) \mathcal{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \mathcal{A}(x_2) \cdots \mathcal{A}(x_{n-1}) S_F(x_{n-1} - x_n) \mathcal{A}(x_n) S_F(x_n - x) \right] \gamma^0 \end{aligned}$$

per cui in definitiva si ha:

$$S_A^\dagger(x'; x) = -\gamma^0 S_A(x'; x) \gamma^0$$

Adesso con questa si può ripetere pari pari tutto il ragionamento fatto al paragrafo scorso per determinare $\psi(x')$ dato $\psi(x)$ definendo lo stesso $F^\mu(x)$ con $S_A(x'; x)$ al posto di $S_F(x' - x)$ per cui alla fine si ottengono le espressioni:

$$\psi^{(+)}(x_2) = \int d^3x_1 S_A(x_2; x_1) \gamma^0 \psi^{(+)}(x_1) \quad \text{per} \quad t_2 > t_1 \quad (3.37a)$$

$$\psi^{(-)}(x_2) = - \int d^3x_1 S_A(x_2; x_1) \gamma^0 \psi^{(-)}(x_1) \quad \text{per} \quad t_2 < t_1 \quad (3.37b)$$

e le analoghe per $\bar{\psi}^{(\pm)}(x)$.

Queste due equazioni però ci sono utili fino ad un certo punto, perché necessitano di conoscere già la soluzione esatta dell'equazione di Dirac; quello che invece ci servirebbe è avere un'espressione che permetta di trovare la soluzione esatta $\Psi(x)$ a partire da una soluzione per l'equazione libera $\psi(x)$.

Una tale espressione può essere trovata in forma ricorsiva con un ragionamento analogo a quello fatto per avere la (3.35); si dimostra cioè che se prendiamo una funzione del tipo:

$$\Psi(x) = \psi(x) - ie \int d^4y S_F(x - y) \not{A}(y) \Psi(y) \quad (3.38)$$

con $\psi(x)$ soluzione dell'equazione di Dirac libera, questa è soluzione dell'equazione di Dirac esatta; per vederlo basta applicare l'operatore differenziale $(i\partial - m)$ col quale si ottiene:

$$\begin{aligned} (i\partial - m)\Psi(x) &= (i\partial - m)\psi(x) - ie \int d^4y (i\partial - m) S_F(x - y) \not{A}(y) \Psi(y) \\ &= 0 + e \int d^4y \delta^4(x - y) \not{A}(y) \Psi(y) \\ &= e \not{A}(x) \Psi(x) \end{aligned}$$

e l'asserto è dimostrato.

La (3.38) presenta lo stesso problema delle (3.37) dato che continua a contenere la soluzione esatta, ha però il grande vantaggio di prestarsi a una risoluzione iterativa (sostituendo dentro l'integrale) che, con lo stesso procedimento usato per il propagatore, ci dà lo sviluppo perturbativo di $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-ie)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \\ &\quad S_F(x - x_1) \not{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \not{A}(x_2) \cdots \not{A}(x_{n-1}) S_F(x_{n-1} - x_n) \not{A}(x_n) \psi(x_n) \end{aligned} \quad (3.39)$$

quest'ultima formula poi suggerisce la possibilità di riscrivere la (3.38) in un'altra forma; infatti se da questa prendiamo in ogni termine i primi $n - 1$ fattori dell'integrale:

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_{n-1} S_F(x - x_1) \not{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \not{A}(x_2) \cdots \not{A}(x_{n-2}) S_F(x_{n-2} - x_{n-1})$$

riconosciamo in questo il termine $(n - 1)$ -simo della serie che nella (3.36) ci dà il propagatore esatto $S_A(x; x_{n-1})$, ed è immediato verificare che alla fine:

$$\Psi(x) = \psi(x) - ie \int d^4y S_A(x; y) \not{A}(y) \psi(y)$$

ed in questa ci basta sostituire lo sviluppo perturbativo per il propagatore per riottenere la (3.39).

L'utilità di queste formule è ancora maggiore quando si passa alle trasformate di Fourier; nel caso della (3.38) ad esempio si ottiene che:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Psi(p) e^{-ipx} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \psi(p) + \\ &- ie \int d^4 y \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} S_F(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-iky} \mathcal{A}(k) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} e^{-ip'y} \Psi(p') \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \psi(p) + \\ &- ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} S_F(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) \int d^4 p' \Psi(p') \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-iy(p'+k-p)} \end{aligned}$$

e adesso nel secondo addendo si può integrare su $d^4 y$ ottenendo una $\delta^4(p' - p + k)$ che integrata su $d^4 p'$ mi dà:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \Psi(p) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \psi(p) - ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} S_F(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) \Psi(p - k)$$

dalla quale, invertendo le trasformate di Fourier si ottiene:

$$\Psi(p) = \psi(p) - ie \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_F(p) \mathcal{A}(k) \Psi(p - k)$$

Adesso vogliamo applicare lo stesso procedimento per lo sviluppo perturbativo di $S_A(x'; x)$, riscrivendo la (3.35) in termini di trasformate di Fourier. Dato che in generale $S_A(x'; x)$ è una funzione diversa di x' ed x scriveremo la sua trasformata di Fourier come:

$$S_A(x_f; x_i) = \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} S_A(p_f; p_i) e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)}$$

adesso dobbiamo sostituire questo nella (3.35) per farlo però occorre usare lo stesso sviluppo anche per $S_F(x_f - x_i)$, che in realtà non ha bisogno di trasformazioni separate per le due variabili, cominciamo perciò con lo scrivere:

$$S_F(x_f - x_i) = \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p_i) e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)}$$

e questa si ricollega alla $S_F(p)$ che abbiamo studiato finora facendone l'antitrasformata, dunque:

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \int d^4(x_f - x_i) S_F(x_f - x_i) e^{ip(x_f - x_i)} = \\ &= \int d^4(x_f - x_i) \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p_i) e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)} e^{ip(x_f - x_i)} \end{aligned}$$

adesso nel secondo membro raccogliamo forzatamente $x_f - x_i$ otteniamo:

$$S_F(p) = \int d^4(x_f - x_i) \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p_i) e^{-i(p_i - p)(x_f - x_i)} e^{-ix_f(p_f - p)}$$

adesso qui possiamo integrare sulla variabile $x_f - x_i$ ottenendo una $\delta^4(p_i - p)$ che si cancella con l'integrazione su p_i per cui questa diventa:

$$S_F(p) = \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) e^{-ix_f(p_f - p)}$$

che riscrivo come:

$$S_F(p)e^{-ix_f p} = \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) e^{-ix_f p_f}$$

e adesso per ottenere la formula definitiva moltiplico ambo i membri per $e^{ix_f p'}$ ed integro su $d^4 x_f$, si ottiene così che il primo mambro diventa:

$$\int d^4 x_f S_F(p) e^{-ix_f(p-p')} = (2\pi)^4 S_F(p) \delta^4(p-p')$$

mentre il secondo:

$$\int d^4 x_f \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) e^{-ix_f(p_f-p')} \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) \delta^4(p_f-p') = S_F(p'; p)$$

dunque si ha in definitiva (cambiando nomi alle variabili):

$$S_F(p_f; p_i) = S_F(p_i) (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \quad (3.40)$$

nota questa relazione possiamo esprimere i propagatori della (3.35) con le rispettive trasformate di Fourier; una banale sostituzione ci permette di ottenere:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} S_A(p_f; p_i) e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)} \\ &= \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)} S_F(p_f; p_i) + \\ & - ie \int d^4 y \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f x_f - p y)} S_F(p_f; p) \\ & \quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik y} \mathcal{A}(k) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i(p' y - p_i x_i)} S_A(p'; p_i) \end{aligned}$$

adesso sviluppiamo il secondo addendo, anzitutto riscriviamolo come:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_f x_f} S_F(p_f; p) \\ & \quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{ip_i x_i} \int d^4 p' S_A(p'; p_i) \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-iy(p' - p + k)} \\ &= \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_f x_f} S_F(p_f; p) \\ & \quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{ip_i x_i} \int d^4 p' S_A(p'; p_i) \delta^4(p' - p + k) \\ &= \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_f x_f} S_F(p_f; p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{ip_i x_i} S_A(p - k; p_i) \\ &= \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f x_f - p x_i)} \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) \mathcal{A}(k) S_A(p - k; p_i) \right] \end{aligned}$$

e sostituendo questo nella precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} S_A(p_f; p_i) e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)} \\ &= \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f x_f - p_i x_i)} S_F(p_f; p_i) + \\ & - ie \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f x_f - p x_i)} \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) \mathcal{A}(k) S_A(p - k; p_i) \right] \end{aligned}$$

e questa invertendo le trasformate di Fourier ci da:

$$S_A(p_f; p_i) = S_F(p_f; p_i) - ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) S_A(p - k; p_i) \quad (3.41)$$

adesso possiamo usare la (3.40) per $S_F(p_f; p_i)$ ottenendo:

$$\begin{aligned} S_A(p_f; p_i) &= S_F(p_i)(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) + \\ &\quad - ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p)(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) S_A(p - k; p_i) \\ &= S_F(p_i)(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) - ie S_F(p_f) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) S_A(p_f - k; p_i) \end{aligned} \quad (3.42)$$

e adesso vediamo come si ottiene lo sviluppo perturbativo di $S_F(p_f; p_i)$; partiamo dalla (3.41); se sostituiamo a secondo membro si ha:

$$\begin{aligned} S_A(p_f; p_i) &= S_F(p_f; p_i) - ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) S_F(p - k; p_i) + \\ &\quad + (-ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p_f; p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k) \\ &\quad \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} S_F(p - k; p') \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \mathcal{A}(k') S_A(p' - k'; p_i) \end{aligned}$$

quindi in generale:

$$\begin{aligned} S_A(p_f; p_i) &= S_F(p_f; p_i) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-ie)^n \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} \\ &\quad S_F(p_f; p_1) \mathcal{A}(k_1) S_F(p_1 - k_1; p_2) \mathcal{A}(k_2) S_F(p_2 - k_2; p_3) \cdots \\ &\quad \cdots \mathcal{A}(k_n) S_F(p_n - k_n; p_i) \end{aligned}$$

da questa usando la (3.40) oppure iterando la (3.42) si ottiene poi un'espressione equivalente:

$$\begin{aligned} S_A(p_f; p_i) &= S_F(p_f)(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-ie)^n \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} \\ &\quad S_F(p_f) \mathcal{A}(k_1) S_F(p_1 - k_1) \mathcal{A}(k_2) S_F(p_2 - k_1 - k_2) \cdots \\ &\quad \cdots \mathcal{A}(k_n) S_F(p_n - k_1 - \dots - k_n)(2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_1 - \dots - k_n - p_i) \end{aligned}$$

3.3 Problemi di scattering

L'importanza maggiore della teoria del propagatore si ha nella trattazione dei problemi di scattering; essi infatti si possono schematizzare come il problema di una particella incidente libera che viene diffusa da un'interazione, dopo la quale si va ad osservare il risultato finale negli stati di particella libera.

3.3.1 La matrice di scattering

Schematizzeremo il problema nel modo seguente: supponiamo di avere una particella all'istante iniziale col nostro sistema all'istante iniziale e che a questo momento l'interazione sia trascurabile

per cui si possa prendere come stato iniziale quello di particella libera; la faremo interagire col potenziale ed usando il propagatore andremo a vedere lo stato finale che otteniamo.

Questo si può fare comunque, anche se l'interazione non è trascurabile, se ciò avviene però non è realistico poter pensare di applicare questo ad una situazione reale in quanto non avremmo possibilità di avere lo stato iniziale voluto; in realtà questo è quello che succede sempre, ma se si fa la teoria esatta (si usa cioè la teoria dei campi) il problema si complica molto (è la questione della cosiddetta *rinormalizzazione*) ma in sostanza le equazioni che vengono fuori sono molto simili a quelle che si ottengono con questa teoria e alla fine si arriva a poter ancora considerare lo stato iniziale come un opportuno analogo corretto dello stato libero.

In genere si considerano particelle a energia positiva, per le antiparticelle vedremo come modificare la notazione, l'idea è quella di partire da uno stato iniziale di particella libera (facendo conto che questo possa considerarsi al tempo iniziale come soluzione valida per l'equazione esatta) e propagarlo al tempo finale con le (3.37); allora se $\psi_i(x)$ è lo stato iniziale otterremo lo stato finale come:

$$\Psi(x_f) = \int d^3x_i S_A(x_f; x_i) \gamma^0 \psi_i(x_i)$$

e noto questo potremo calcolare la probabilità di transizione ad un altro stato $\phi_f(x_f)$ (che si chiama *ampiezza di scattering*) col solito prodotto scalare:

$$S_{fi} = \langle \phi_f(x_f) | \Psi(x_f) \rangle = \int d^3x_f \phi_f^\dagger(x_f) \Psi(x_f) \quad (3.43)$$

infatti se ricordiamo quanto esposto al §2.4.4 questa è l'analogia di quanto si scrive per la quantità $\bar{\psi}\psi$, conservata grazie all'equazione di continuità, che si interpreta classicamente come la densità di probabilità della particella. Adesso possiamo sfruttare la precedente per riscrivere questa come:

$$S_{fi} = \int d^3x_f \int d^3x_i \phi_f^\dagger(x_f) S_A(x_f; x_i) \gamma^0 \psi_i(x_i)$$

e qui basta inserire due γ^0 fra $\phi_f^\dagger(x_f)$ e $S_A(x_f; x_i)$ per ottenere:

$$S_{fi} = \int d^3x_f \int d^3x_i \bar{\phi}_f(x_f) \gamma^0 S_A(x_f; x_i) \psi_i(x_i)$$

adesso usiamo lo sviluppo perturbativo del propagatore; otteniamo che:

$$\begin{aligned} S_{fi} = & \int d^3x_f \int d^3x_i \bar{\phi}_f(x_f) \gamma^0 S_F(x_f; x_i) \gamma^0 \psi_i(x_i) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (-ie)^n \int d^3x_f \int d^3x_i \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \\ & \bar{\phi}_f(x_f) \gamma^0 S_F(x_f - x_1) \not{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \cdots \\ & \cdots \not{A}(x_{n-1}) S_F(x_{n-1} - x_n) \not{A}(x_n) S_F(x_n - x_i) \gamma^0 \psi_i(x_i) \end{aligned}$$

adesso qui nel primo addendo possiamo usare le analoghe la (3.37) per le soluzioni libere per propagare $\psi_i(x_i)$ fino a x_f (usando ovviamente S_F) e ottenere banalmente $\langle \phi_f | \psi_i \rangle$, mentre negli addendi successivi possiamo riusare le analoghe delle (3.37) per propagare $\phi_f^\dagger(x_f)$ fino a x_1 e $\psi_i(x_i)$ ad x_n ; così si riassorbono gli integrali su x_i e x_f e si ottiene:

$$\begin{aligned} S_{fi} = & \delta_{fi} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (-ie)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \phi_f(x_n) \not{A}(x_1) S_F(x_1 - x_2) \cdots S_F(x_{n-1} - x_n) \not{A}(x_n) \psi_i(x_n) \end{aligned}$$

che è lo sviluppo perturbativo per S_{if} che è detta *matrice di scattering*; si noti poi come questo sia espresso in forma covariante e non venga più a dipendere da x_i e x_f .

Capitolo 4

Teoria dei campi classica.

Abbiamo già fatto notare come le equazioni di Dirac e Klein-Gordon presentino dei problemi che è possibile superare solo in parte; questo è un sintomo di un risultato generale, e cioè che in meccanica quantistica relativistica non è possibile scrivere un'equazione coerente con l'interpretazione di equazione di particella singola (per esempio nell'equazione di Dirac si parte con un elettrone, e poi ce ne vogliono infiniti per fare il mare di Dirac, e comunque ci si trova con un'equazione che comporta elettroni e positroni).

4.1 Introduzione.

Il punto fondamentale è che in relatività la creazione e la distruzione di particelle nelle interazioni è possibile perché strettamente connessa all'equivalenza massa-energia, e in una teoria coerente bisogna tenerne conto.

Questo allora non può essere fatto con una equazione di particella singola, in cui l'assunto fondamentale è che la particella ci sia sempre (cioè che la probabilità data dalle autofunzioni sia 1) ma con una teoria diversa. Quello che vedremo è che trattando ogni particella come un campo (del tipo del campo elettromagnetico) e andando a quantizzare quest'ultimo, otterremo automaticamente la descrizione di un sistema con un numero di particelle qualsiasi, nel quale si può tener conto senza problemi della creazione e della distruzione delle medesime.

4.1.1 I campi classici.

Per poter introdurre al §5 il meccanismo della quantizzazione dei campi occorre anzitutto vedere come si introduce la meccanica analitica dei campi classica. Il passaggio da fare è quello che si fa in meccanica analitica classica quando si passa da un sistema con un numero finito di gradi di libertà a un sistema con infiniti gradi di libertà come un sistema continuo.

Il metodo più diretto per fare il passaggio è quello di schematizzare il continuo discretizzandolo, dividendolo come se fosse costituito da un numero discreto di parti (anche infinito, ma numerabile per poter applicare il formalismo usuale) per passare poi al continuo facendo un limite.

Come esempio di tale passaggio, che comunque ci darà tutti i tratti salienti del discorso, prendiamo una sbarra elastica della quale consideriamo solo vibrazioni trasversali; un sistema che la approssima può essere una catena di masse puntiformi m separate da una distanza fissa a e collegate fra loro da molle ideali di costante elastica k che si muovono solo nella direzione della catena (prendiamo cioè, per semplicità, un sistema unidimensionale).

Se indichiamo con η_i lo spostamento della i -esima massa dalla posizione di equilibrio potremo indicarne l'energia cinetica con:

$$T_i = \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2$$

e l'energia cinetica totale è la somma di queste, mentre l'energia potenziale dipende dagli spostamenti reciproci sarà:

$$V_i = \frac{1}{2}k(\eta_i - \eta_{i+1})^2$$

(dato che $V = \frac{1}{2}kx^2$ se η_i è positivo ci dà una compressione della molla, mentre η_{i+1} una estensione; e di nuovo l'energia potenziale totale sarà la somma di queste; cioè:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2 \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2} \sum_i k(\eta_i - \eta_{i+1})^2$$

per cui alla fine si ha che la lagrangiana del sistema è:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{\eta}_i^2 - k(\eta_i - \eta_{i+1})^2]$$

e se vogliamo introdurre il passaggio al continuo possiamo riscrivere questa come:

$$L = a \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - \frac{k}{a} (\eta_i - \eta_{i+1})^2 \right] = \sum_i a \mathcal{L}_i \quad (4.1)$$

dove $\mathcal{L}_i$ è la lagrangiana per unità di lunghezza data da:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i+1}}{a} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

adesso possiamo usare le equazioni di Eulero che sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0$$

che applicate alla (4.1) ci danno:

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0 \quad (4.3)$$

(si ricordi che η_i compare nell'energia potenziale sempre in due termini, quello in i e quello in $i - 1$ come successivo) queste sono infinite equazioni accoppiate, adesso si vuol vedere cosa ci danno nel caso del limite continuo per $a \rightarrow 0$; evidentemente m/a tende alla densità di massa per unità di lunghezza μ , meno chiaro è ka , ma ricordiamoci la legge di Hooke dell'allungamento della sbarra che ci dice che $F = Y\zeta$ dove Y è il modulo di Young e ζ è l'allungamento per unità di lunghezza $\Delta L/L$; nel nostro caso abbiamo visto che la forza è:

$$F = \frac{1}{2}k(\eta_i - \eta_{i+1}) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right) = ka \frac{\Delta L}{L}$$

dunque al limite si ha l'identificazione $ka = Y$.

Per capire meglio cosa succede al limite continuo introduciamo la variabile continua x al posto dell'indice i , che ci specificherà la posizione lungo la sbarra; sarà allora $\eta_i = \eta(x)$ ed evidentemente $\eta_{i+1} = \eta(x + a)$; in questo modo si ottiene che:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\eta(x + a) - \eta(x)}{a} \right) = \eta'(x)$$

allora se ci riscriviamo la (4.3) otteniamo che:

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}(x) - ka \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\eta(x + a) - \eta(x)}{a} \right) - \left(\frac{\eta(x) - \eta(x - a)}{a} \right) \right]$$

ma evidentemente:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} \right) - \left(\frac{\eta(x) - \eta(x-a)}{a} \right) \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [\eta'(x) - \eta'(x-a)] = \eta''(x)$$

per cui alla fine dalla (4.3) si ottiene l'equazione:

$$\mu \ddot{\eta}(x) - Y \eta''(x) = 0$$

che è l'equazione delle onde elastiche nella sbarra. Sempre nel limite otterremo che la lagrangiana può essere scritta in termini della densità di lagrangiana (4.2) come:

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] dx = \int \mathcal{L} dx$$

Questo semplice esempio ci mostra già gli esempi più salienti del passaggio da un sistema discreto ad uno continuo, passaggi che resteranno validi anche nella quantizzazione; il fatto più importante da capire è il nuovo ruolo che viene a svolgere la coordinata di posizione x ; essa non è più una variabile canonica del sistema, serve solo come indice continuo al posto dell'indice discreto i , e le coordinate generalizzate del sistema sono le $\eta(x)$ relative a ciascun x che corrispondono alle discrete η_i .

Inoltre dato che in generale η dipende anche dal tempo (introdotto anche in meccanica analitica classica come parametro esterno) potremo scrivere in generale che $\eta = \eta(x, t)$ e questo ci mostra come sia immediatamente possibile fare un'estensione relativistica, dato che adesso le coordinate spaziali e temporali vengono ad assumere lo stesso ruolo.

4.2 La meccanica analitica dei campi.

Abbiamo visto in §4.1.1 i tratti salienti con cui si introduce la meccanica dei campi in meccanica classica, attraverso il limite continuo di una discretizzazione, cercheremo ora di formalizzare il nostro esempio per introdurre una trattazione formale della meccanica analitica dei campi.

Vedremo anche come il passaggio del ruolo delle coordinate spaziali da variabile canonica ad indice continuo permetta di fare da subito una formulazione covariante senza grandi sforzi.

4.2.1 Il formalismo lagrangiano della teoria dei campi.

Vediamo allora come si può formulare una trattazione generale della dinamica dei campi. Il punto di partenza resta il principio di minima azione, si dovrà però vedere come riesprimere l'azione avendo a che fare con campi; comunque se L è la lagrangiana del sistema sarà ancora:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

soltanto che adesso l'espressione di L si otterrà (essendo il limite continuo delle somme delle lagrangiane di ogni grado di libertà) come integrale di una densità di lagrangiana $\mathcal{L}$; e nel caso generale, essendo in tre dimensioni, sarà:

$$L = \int \mathcal{L} dV$$

ed $\mathcal{L}$ in generale sarà, per quanto visto prima e per analogia con la meccanica analitica classica, funzione dei campi, delle loro derivate spaziali e temporali, ed eventualmente anche delle coordinate (spaziali e temporali), ma quest'ultimo caso sarà solo quello in cui agiscono forze esterne;

in generale se considereremo solo campi liberi o al più interagenti fra di loro, l'omogeneità ed isotropia dello spazio e del tempo ci permette di escludere questa dipendenza che automaticamente privilegierebbe istanti e coordinate particolari.

Utilizzando tutto ciò potremo allora riscriverci l'azione nella forma più generale (considerando anche più campi $\phi_1, \dots, \phi_n$) come:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \mathcal{L} \left(\phi_i, \dot{\phi}_i, \frac{d}{dx_k} \phi_i \right)$$

è immediato notare che questo è un integrale quadridimensionale, per cui è immediato impostare tutto col formalismo relativistico, facendo direttamente una teoria covariante.

Il punto fondamentale è allora che si postula che anche in relatività resti valido il principio di minima azione, per cui esiste una quantità S (che deve essere un invariante) la cui variazione, nel senso che preciseremo subito, deve essere nulla sul moto effettivo; l'analogia col caso classico ci permette di usare la formulazione appena data, che riscriveremo in forma relativistica come:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \left(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \right) \quad (4.4)$$

dove l'integrale si prende sul volume compreso fra due superfici space-like $t = t_1$ e $t = t_2$, ma può essere comunque essere definito anche più in generale. Questa definizione ci mostra anche che la densità di lagrangiana deve essere uno scalare invariante.

Adesso per trovare le equazioni del moto dovremo applicare il principio di Hamilton che dice che δS è nullo per tutti gli spostamenti virtuali che lasciano invariati gli estremi; tali spostamenti però riguardano solo i campi ϕ_i (che sono gli equivalenti delle q_i dei sistemi finiti) e non le coordinate spaziali che qui fungono da indici e che quindi, come il tempo nella meccanica analitica classica, resteranno costanti, per cui la variazione non può influire né sui limiti di integrazione rispetto al tempo, né sulla regione di integrazione spaziale, ma sarà data solo dalla variazione della densità di lagrangiana dovuta al variare dei campi.

Oltre a questo la condizione di variazione nulla sugli estremi significherà in questo caso le variazioni dei campi dovranno essere nulle sulla ipersuperficie (tridimensionale) che contorna l'ipervolume su cui si integra, cioè sia per $t = t_1$ e $t = t_2$ che all'infinito; sarà cioè:

$$\begin{cases} \delta \phi(\mathbf{x}, t_1) = \delta \phi(\mathbf{x}, t_2) = 0 \\ \delta \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.5)$$

fatte queste considerazioni possiamo passare a calcolarci la variazione dell'azione che sarà:

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \int d^4x \delta \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (4.6)$$

per cui basta calcolarsi la variazione di $\mathcal{L}$; per snellire le formule introduciamo la notazione $\partial^\mu \phi_i = \phi_i^\mu$, sarà allora:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} \delta \phi_i^\mu$$

dove per definizione:

$$\delta \phi_i^\mu = \delta(\partial^\mu \phi_i) = \partial^\mu \delta \phi_i$$

e si è sottintesa la somma sugli indici ripetuti. Adesso con queste relazioni la (4.6) diventa:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} \partial^\mu \delta \phi_i \right]$$

adesso possiamo integrare per parti il secondo addendo, otterremo:

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} \partial^\mu \delta \phi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} \delta \phi_i \Big|_S - \int d^4x \left[\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} \right] \delta \phi_i$$

ma le condizioni (4.5) di variazioni nulle agli estremi ci dicono che $\delta \phi_i = 0$ su S dunque di questa resta solo il secondo termine che sostituito nella precedente ci da:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \left(\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} \right) \right] \delta \phi_i$$

(si è raccolto $\delta \phi_i$) adesso δS e tutti i $\delta \phi_i$ sono indipendenti ed arbitrari per cui per far si che sia nullo l'integrale deve essere nullo l'integrando e dunque si ottengono le equazioni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^\mu} = 0 \quad (4.7)$$

che sono tante quanti sono i campi e ci danno la dinamica dei medesimi; anch'esse, come generalizzazione al caso con infiniti gradi di libertà, sono dette *equazioni di Eulero-Lagrange*, per i campi.

Si noti che se si aggiunge alla densità di lagrangiana (da qui in avanti per semplicità la chiameremo direttamente lagrangiana) la divergenza di una funzione qualsiasi dei campi:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\mu(\phi_i) = \frac{\partial f_\mu}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial \phi_i} \phi_i^\mu$$

l'azione, per il teorema di Gauss, non varia, dunque anche le (4.7) sono invarianti, questo si può vedere direttamente se sostituiamo questa espressione a $\mathcal{L}$ nella (4.7) verificando che il risultato è identicamente nullo; infatti:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial \phi_i} \phi_i^\mu \right) - \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i^\mu} \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial \phi_i} \phi_i^\mu \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2} \phi_i^\mu - \partial_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \phi_i} = \frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2} \phi_i^\mu - \frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2} \phi_i^\mu = 0$$

4.2.2 Il teorema della Noeter.

Questo è un teorema fondamentale della meccanica analitica che permette di legare le simmetrie del sistema alla presenza di quantità conservate; esso afferma che tutte le volte che il sistema è invariante rispetto a un gruppo continuo di trasformazioni (per la precisione un gruppo di Lie) esiste una quantità conservata dalla dinamica per ogni parametro del gruppo; questo ad esempio comporterà per tutti i sistemi relativistici, per i quali per l'omogeneità e l'isotropia dello spazio-tempo si deve avere invarianza rispetto alle trasformazioni di Poincarè, la conservazione del quadrimpulso e del momento angolare.

Vediamo allora come si dimostra questo teorema, il punto di partenza è ancora l'espressione (4.4) dell'azione, però occorre precisare cosa si intende per sistema invariante per una trasformazione. Evidentemente dire che l'azione è invariante non significa nulla, dato che per definizione le trasformazioni dovranno comunque lasciare invarianti gli scalari relativistici, per cui sarà sempre $S'(V') = S(V)$ cioè $\delta S = 0$.

Il fatto che l'azione sia invariante allora non è altro che una conseguenza della sua definizione e della definizione delle trasformazioni; se il sistema è invariante quello che si deve avere è che la dinamica deve essere la stessa per tutti i campi trasformati (devono cioè soddisfare le stesse equazioni del moto), e dato che la dinamica è data dalle derivate rispetto ai campi della lagrangiana è questa che deve mantenere la stessa forma funzionale per i campi trasformati (e non tanto essere uno scalare invariante, dato che anch'essa lo è per definizione), deve cioè esserci la cosiddetta *invarianza di forma*:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad \text{cioè} \quad \mathcal{L}'(\phi'(x'), \phi'_\mu(x')) = \mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_\mu(x')) \quad (4.8)$$

Adesso si tratta di calcolare δS , che sappiamo essere nulla, per la trasformazione e vedere cosa comporta l'ipotesi (4.8). Per semplicità useremo un solo campo, l'estensione a più campi è immediata; sfruttando il fatto di avere gruppi di Lie che consentono trasformazioni infinitesime note possiamo considerare le variazioni infinitesime dei campi e delle coordinate:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x) \\ \delta x^\mu &= x'^\mu - x^\mu\end{aligned}$$

(con gli indici si indicano le quantità trasformate). Oltre a queste per fare i conti ci serve anche la *variazione locale* dei campi definita come:

$$\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$$

e questa si può collegare a $\delta\phi$ sviluppando quest'ultimo come:

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) = \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x^\mu}(x'^\mu - x^\mu) + \delta_0\phi(x) = \delta_0\phi(x) + \phi'_\mu(x)\delta x^\mu$$

dalla quale segue subito che:

$$\delta\phi = \delta_0\phi + \phi_\mu\delta x^\mu \quad (4.9)$$

(nel secondo addendo, essendo moltiplicato per un termine infinitesimo, l'uso di ϕ o ϕ' è indifferente) dunque la variazione completa dei campi è la somma della variazione dei campi mantenendo costanti le coordinate più la variazione dovuta alla variazione delle coordinate. Adesso possiamo calcolarci la variazione dell'azione, dalla definizione sarà:

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_\mu(x')) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x)) \quad (4.10)$$

e stavolta, variando le coordinate, varia anche il volume di integrazione, per questo dovremo anzitutto farci una trasformazione di variabile per tornare da d^4x' a d^4x ; l'analisi ci dice che nelle trasformazioni di variabili l'elemento di volume trasforma come:

$$d^4x' = \left\| \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right\| d^4x$$

ma evidentemente $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ dunque:

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (x^\nu + \delta x^\nu) = \delta_\mu^\nu + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu}$$

ed usando il solito teorema $\det(\mathbb{I} + \epsilon A) = 1 + \epsilon \text{Tr } A$ si ottiene che nel nostro caso:

$$\left\| \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right\| = 1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}$$

per cui si ha che:

$$d^4x' = d^4x \left(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right)$$

cioè:

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = \left(\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) d^4x$$

e adesso si può portare tutto sotto un solo integrale riscrivendoci la (4.10) come:

$$\delta S = \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_\mu(x')) - \mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x)) + \mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x)) \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right] \quad (4.11)$$

(dove nell'ultimo addendo si è sostituito x ad x' dato che già si moltiplica per una quantità infinitesima) si noti che questa assume la forma:

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} - \int \delta(d^4x) \mathcal{L}$$

che si sarebbe potuta ottenere eseguendo direttamente le variazioni sull'integrale della (4.4).

Resta da vedere cos'è $\delta \mathcal{L}$ dalla definizione si vede subito che si può riscriverla come:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= [\mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_\mu(x')) - \mathcal{L}(\phi(x'), \phi_\mu(x'))] + [\mathcal{L}(\phi(x'), \phi_\mu(x')) - \mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x))] \\ &= \delta' \mathcal{L} + \delta'' \mathcal{L} \end{aligned}$$

adesso si vede subito che $\delta'' \mathcal{L}$ non è altro che la variazione della lagrangiana quando ci si sposta dal punto x al punto x' , per questo potremo scrivere:

$$\delta'' \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

invece $\delta' \mathcal{L}$ è la variazione della lagrangiana per una variazione dei soli campi, tenendo costanti le coordinate, che abbiamo visto essere data da $\delta_0 \phi$, pertanto si avrà:

$$\delta' \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta_0 \phi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \partial_\mu \delta_0 \phi$$

(nel secondo addendo si è invertito ∂_μ e δ_0) in generale sarà dunque:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \partial_\mu \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

cioè la variazione totale è la somma della variazione della lagrangiana dovuta ai soli campi più quella dovuta alle sole coordinate.

Con queste espressioni possiamo sostituire nella (4.11), ed essendo tutte queste espressioni già infinitesime potremo anche mettere x al posto di x' e ϕ al posto di ϕ' senza problemi, otteniamo così:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \partial_\mu \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right] \quad (4.12)$$

adesso però si ha che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\mathcal{L} \delta x^\mu]$$

mentre si può scrivere:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial \delta_0 \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta_0 \phi \right] - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \right) \delta_0 \phi$$

e usando queste ultime due nella (4.12) si ottiene:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \right) \delta_0 \phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta_0 \phi \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right]$$

ma adesso i primi due addendi di questa, raccolto $\delta_0 \phi$, si annullano identicamente per le equazioni del moto (4.7) e resta soltanto:

$$\delta S = \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} (\delta_0 \phi) + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

da questa segue, per l'arbitrarietà del volume di integrazione, che comunque deve essere nullo l'integrando, dunque si ha l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} (\delta_0 \phi) + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

adesso però quelli che sono noti in termini delle trasformazioni non sono tanto i $\delta_0 \phi$ quanto le variazioni $\delta \phi$, per cui usando l'espressione (4.9) otteniamo che:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \phi^\nu \delta x_\nu + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

e qui possiamo raccogliere i δx^ν scrivendo $\mathcal{L} \delta x^\mu = g^{\mu\nu} \delta x_\nu$ ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta \phi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \phi^\nu - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right) \delta x_\nu \right] = 0 \quad (4.13)$$

e questa è una equazione di continuità, che era quanto volevamo ottenere dall'inizio, che non solo ci dà una quantità conservata, ma anche la quadricorrente ad essa connessa.

Il teorema quindi è dimostrato, adesso basta soltanto scriversi $\delta \phi$ e δx^μ in termini delle trasformazioni rispetto alle quali si ha l'invarianza che si possono ottenere le espressioni esplicite delle quantità conservate.

La dimostrazione è stata fatta per un campo solo, l'estensione a un numero finito di campi è però immediata, in tal caso infatti avremo tante variazioni quanti sono i campi:

$$\delta \phi_i = \phi'_i(x') - \phi_i(x)$$

e l'estensione immediata della (4.13) è:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \delta \phi_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \phi_i^\nu - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right) \delta x_\nu \right] = 0 \quad (4.14)$$

adesso per snellire la notazione introduciamo la quantità:

$$\pi_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}}$$

che viene chiamata *momento coniugato* del campo ϕ_i in analogia col momento coniugato definito in meccanica analitica ordinaria; si definisce poi anche il *tensore energia-impulso* del campo come:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \phi_i^\nu - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \pi_i^\mu \phi_i^\nu - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (4.15)$$

con la quale la (4.14) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} [\pi_i^\mu \delta \phi_i - T^{\mu\nu} \delta x_\nu] = 0 \quad (4.16)$$

Prima di fare i conti con alcune trasformazioni particolari conviene introdurre una notazione generale scrivendo una trasformazione infinitesima qualsiasi nella forma:

$$T(\alpha) = 1 + \alpha_n G^n$$

dove i G^n sono i generatori relativi all' n -simo parametro α_n della trasformazione, che in questo caso è supposto infinitesimo; in generale i G^n saranno operatori diversi a seconda dello spazio su

cui, come rappresentazioni del gruppo delle trasformazioni, vanno ad operare. Allora applicando questa relazione alle coordinate ed ai campi avremo che:

$$\delta x_\mu = \alpha_n G_{\mu\nu}^n x^\nu = \alpha_n X_\mu^n \quad (4.17a)$$

$$\delta \phi_i = \alpha_n G_{ij}^n \phi_j = \alpha_n Y_i^n \quad (4.17b)$$

per cui alla fine, sostituendo queste nella (4.16) e semplificando gli α_n che sono indipendenti si ottengono le n equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} [\pi_i^\mu Y_i^n - T^{\mu\nu} X_\nu^n] = 0 \quad (4.18)$$

relative alle n quantità conservate.

4.2.3 L'invarianza per traslazioni e rotazioni.

Un caso particolare di invarianza che ci deve essere per tutti i sistemi relativistici è quella per le traslazioni spazio-temporali e per le trasformazioni di Lorentz; vediamo allora cosa comporta per esse il teorema della Noeter.

Cominciamo con le traslazioni spazio-temporali, in questo caso una trasformazione infinitesima delle coordinate si può sempre scrivere nella forma:

$$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu$$

se questa però vogliamo usarla per sfruttare quanto visto usando la forma generica delle trasformazioni vista nelle (4.17) dovremo riscriverla in una forma più opportuna come:

$$x'_\mu = x_\mu + g_\mu^\nu \epsilon_\nu \quad \text{e} \quad \delta x_\mu = g_\mu^\nu \epsilon_\nu$$

e questa ci mostra come in questo caso l'indice n diventi un indice covariante ν e come in questo caso sia $X_\mu^n = X_\mu^\nu = g_\mu^\nu$, i campi invece sono comunque invarianti per traslazione per cui $\delta \phi = 0$ ed evidentemente $Y_i^n = Y_i^\nu = 0$ dunque dalla (4.18) si ha immediatamente:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} [T^{\mu\nu} g_\nu^\rho] = 0 \quad \text{cioè} \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Per le trasformazioni di Lorentz le cose sono un po' più complesse, infatti se vogliamo mantenere le notazioni tensoriali che ci danno le proprietà di tensoriali dei sei angoli covarianti $\omega_{\alpha\beta}$ che sono i parametri indipendenti delle trasformazioni, bisogna stare molto attenti alla proprietà di antisimmetria $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ ed al fatto che quando si fa la semplificazione dei parametri che porta alla (4.18) occorre semplificare su relazioni indipendenti, ed una relazione del tipo $A^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = 0$ non comporta più $A^{\alpha\beta} = 0$ dato che la parte simmetrica di quest'ultimo nel prodotto è nulla in ogni caso.

Al solito allora potremo effettuare la semplificazione ed ottenere relazioni indipendenti soltanto con quantità antisimmetriche negli indici. Nel §2.3.2 abbiamo visto che le trasformazioni infinitesime sono date dalla (2.28) per cui le coordinate si possono esprimere come:

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\sigma} x^\sigma$$

per cui sarà:

$$\delta x_\mu = \omega_{\rho\sigma} g_\mu^\rho x^\sigma$$

ma qui non ho una quantità antisimmetrica a moltiplicare $\omega_{\rho\sigma}$ per cui si deve antisimmetrizzare questa come:

$$\delta x_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (g_\mu^\rho x^\sigma - g_\mu^\sigma x^\rho) = \omega_{\rho\sigma} X_\mu^{\rho\sigma}$$

e questa ha tutti i coefficienti indipendenti per cui possiamo inserire nella (4.18) il termine:

$$X_\mu^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (g_\mu^\rho x^\sigma - g_\mu^\sigma x^\rho)$$

dove al posto di n si hanno gli indici ρ e σ .

Per i campi le cose sono più complesse dato che il loro comportamento dipende da cosa il campo rappresenta; se il campo è scalare ovviamente sarà invariante e gli Y saranno nulli; ma si possono avere campi vettoriali, tensoriali ecc. nel qual caso le trasformazioni di Lorentz mescoleranno opportunamente le varie componenti. In genere i campi che si usano sono o campi spinoriali di spin $1/2$ come il campo di Dirac o campi vettoriali come il campo elettromagnetico; in questi casi i generatori G_{ij} sono matrici nello spazio vettoriale dei campi e allora si usa scrivere in componenti che:

$$\delta\phi_i = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} \Sigma_{ij}^{\rho\sigma} \phi_j = \omega_{\rho\sigma} Y_i^{\rho\sigma}$$

dove le $\Sigma_{ij}^{\mu\nu}$ (antisimmetriche in μ e ν) fanno le veci di quelle che per le rotazioni normali sono le matrici σ di Pauli (ed è questa la ragione del fattore $1/2$); da questa si ottiene:

$$Y_i^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij}^{\rho\sigma} \phi_j$$

nel caso del campo di Dirac poi conosciamo già le $\Sigma_{ij}^{\mu\nu}$ e abbiamo visto che sono le matrici $\sigma^{\mu\nu}$ incontrate al §2.3.2 ed espresse dalla (2.33).

Adesso per trovare le quantità conservate associate alle trasformazioni di Lorentz possiamo sostituire le espressioni trovate per X e Y nella (4.18) ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{1}{2} \left(-\pi_i^\mu \Sigma_{ij}^{\rho\sigma} \phi_j + T^{\mu\nu} (g_\nu^\rho x^\sigma - g_\nu^\sigma x^\rho) \right) \right] = 0$$

e se definiamo il tensore *densità di momento angolare*:

$$\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} = T^{\mu\rho} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\rho - \pi_i^\mu \Sigma_{ij}^{\rho\sigma} \phi_j \quad (4.19)$$

(antisimmetrico in ρ e σ) la precedente diventa:

$$\frac{\partial \mathcal{M}^{\mu\rho\sigma}}{\partial x^\mu} = 0$$

ed in generale se i campi sono qualcosa di più complesso dovremo lasciare l'ultimo termine della (4.19) in forma implicita come $\pi_i^\mu Y_i^{\rho\sigma}$.

Viste queste relazioni si possono studiare le quantità conservate, dal tensore energia-impulso si ottengono le costanti del moto relative all'invarianza per traslazione del sistema, che sono dunque le componenti del quadrimpulso dei campi date da:

$$p^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$$

dal tensore densità di momento angolare si ottengono invece le costanti del moto derivanti dall'invarianza di rotazione che sono le sei componenti del tensore di momento angolare definite dalla relazione:

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x \mathcal{M}^{0\mu\nu}$$

(che evidentemente è un tensore antisimmetrico per le proprietà degli ultimi due indici del tensore densità di momento angolare).

Un modo alternativo di dimostrare la conservazione del quadrimpulso si può ottenere sfruttando direttamente le equazioni del moto; dalla definizione del tensore energia-impulso si ha che:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu}$$

adesso possiamo usare le equazioni del moto per il primo di questi tre addendi ottenendo:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}$$

(si è anche esplicitata la derivata nel secondo e sistemato l'indice nel terzo); adesso però se $\mathcal{L}$ non dipende da x (cosa sempre vera quando c'è invarianza per traslazione), avremo che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu}$$

che sostituito nella precedente ci dà immediatamente:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\nu \partial x^\mu} \right)$$

e la regolarità dei campi ci assicura che, per il teorema di Schwartz, anche la parentesi tonda è nulla per cui si ottiene la conservazione del quadrimpulso.

Per il momento angolare le cose sono ovviamente più complesse; ovviamente è sempre naturale definirlo come

$$\bar{\mathcal{M}}^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$$

da cui derivando:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{M}}^{\mu\nu\rho}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} x^\rho + T^{\mu\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\mu} - \frac{\partial T^{\mu\rho}}{\partial x^\mu} x^\nu - T^{\mu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}$$

adesso qui $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\rho} = 0$ per cui con pochi conti si ottiene che:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{M}}^{\mu\nu\rho}}{\partial x^\mu} = T^{\mu\nu} \delta_\mu^\rho - T^{\mu\rho} \delta_\mu^\nu = T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}$$

dunque, a meno che $T^{\mu\nu}$ non sia simmetrico $\bar{\mathcal{M}}^{\mu\nu\rho}$ non ci dà una quantità conservata; il che è logico dato che questo è solo il momento angolare orbitale, e ci manca lo spin trasportato dal campo stesso.

4.2.4 L'invarianza di gauge di prima specie.

Un'invarianza che troveremo spesso nei campi che esamineremo è l'invarianza per trasformazioni di fase, la più semplice di queste invarianze è l'invarianza per moltiplicazioni per un qualsiasi numero complesso costante di modulo unitario, che si suole chiamare *invarianza di gauge di prima specie*.

In questo caso il gruppo delle trasformazioni che cerchiamo è semplicemente il gruppo $U(1)$ dei numeri complessi di modulo unitario (in teoria dei gruppi per $U(N)$ si intende il gruppo costituito dalle matrici unitarie complesse di dimensione N), in fisica delle particelle si usano spesso anche i gruppi $SU(N)$, in cui si richiede la condizione aggiuntiva di determinante unitario (la S sta per speciale, ed evidentemente $SU(1) = U(1)$); ad esempio il gruppo delle rotazioni è isomorfo al gruppo $SU(2)$.

La condizione banale per l'invarianza di fase è che la Lagrangiana sia una funzione reale di un campo complesso $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ dove ϕ_1 e ϕ_2 sono campi indipendenti; in questo caso potremo

usare il teorema della Noether e vedere qual è la quantità conservata connessa a questa simmetria, per semplicità considereremo come campi indipendenti ϕ e ϕ^* al posto di ϕ_1 e ϕ_2 , e in generale sarà $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, \phi^*, \phi_\mu^*)$ o per più campi $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \phi_{i,\mu}, \phi_i^*, \phi_{i,\mu}^*)$.

Scriveremo allora la trasformazione considerata come $e^{ie\lambda}$ (intendendo moltiplicazione per) dove e è una costante qualsiasi (tanto le quadricorrenti sono comunque definite a meno di una costante) che potrà essere aggiustata opportunamente.

In questo caso le trasformazioni infinitesime sono nulle per le coordinate (che non vengono toccate da questa trasformazione), mentre per i campi si ha:

$$\phi'_i = \phi_i + ie\lambda\phi_i \quad \text{e} \quad \phi'^*_i = \phi_i^* - ie\lambda\phi_i^*$$

dunque si ha che:

$$\delta\phi'_i = ie\lambda\phi_i = \lambda Y_i \quad \text{e} \quad \delta\phi'^*_i = -ie\lambda\phi_i^* = \lambda Y_i^*$$

e stavolta invece dell'indice per i campi abbiamo usato Y_i e Y_i^* per cui occorrerà sommare su questi. Adesso possiamo usare la (4.18) ricordando che gli X_ν sono nulli; si ottiene così che:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ie\phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} - ie\phi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}^*} \right] = 0$$

dunque la corrente conservata è:

$$j_\mu = e \left[\phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} - \phi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}^*} \right]$$

e la quantità conservata:

$$Q = \int j^0 d^3x = e \int d^3x \left[\phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} - \phi_i^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}^*} \right]$$

che può essere interpretata come la carica elettrica totale trasportata dal sistema descritto dal campo complesso ϕ .

4.2.5 Il teorema di Belinfante.

E' importante notare che il tensore energia-impulso, dipendendo anche dalla lagrangiana che è sempre definita a meno di una quadridivergenza, non è definito univocamente. Dato che ciò che deve essere univoco sono le osservabili fisiche (come l'energia e l'impulso) è immediato osservare che data la definizione (4.15) si possono ricavare altri infiniti tensori energia-impulso, tutti equivalenti, nella forma:

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda A^{\lambda\mu\nu}$$

dove $A^{\lambda\mu\nu}$ è un tensore qualsiasi che soddisfi alla condizione:

$$A^{\lambda\mu\nu} = -A^{\mu\lambda\nu}$$

che sia cioè antisimmetrico rispetto ai primi due indici e che si annulli all'infinito (cioè per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$).

Per dimostrare l'equivalenza notiamo che per la simmetria delle derivate parziali $\partial_\mu \partial_\lambda$ e l'antisimmetria di $A^{\lambda\mu\nu}$ appena vista si ha immediatamente:

$$\frac{\partial T'^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$$

dato che è banalmente $\partial_\mu \partial_\lambda A^{\lambda\mu\nu} = 0$. Ovviamente questo non basta per l'equivalenza di $T'^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$, occorre che sia lo stesso anche il quadrimpulso p^μ , che abbiamo visto essere:

$$p'^\nu = \int T'^{\mu\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x + \int \partial_\lambda A^{\lambda 0\nu} d^3x$$

adesso però la somma $\partial_\lambda A^{\lambda 0\nu}$ per l'antisimmetria si riduce a $\partial_i A^{i0\nu}$ e ottengo così l'integrale tridimensionale di una divergenza che tratto col teorema di Gauss, andando sulla superficie all'infinito dove $A^{\lambda\mu\nu}$ è nullo per cui questo termine se ne va; resta così solo l'integrale di $T^{\mu\nu}$ per cui alla fine $p'^\nu = p^\nu$.

Un ragionamento del tutto analogo si può fare col tensore densità di momento angolare $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ sfruttando un qualsiasi tensore $A^{\lambda\rho\mu\nu}$ antisimmetrico rispetto ai primi due indici e che vada a zero per $\mathbf{x}$ che va all'infinito; in tal caso con lo stesso identico procedimento di prima si otterrà che:

$$\mathcal{M}'^{\rho\mu\nu} = \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} + \partial_\lambda A^{\lambda\rho\mu\nu}$$

è perfettamente equivalente a $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$.

Date queste relazioni possiamo dimostrare il *teorema di Belinfante*, che permette di scrivere $T^{\mu\nu}$ e $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ in forma semplificata.

Il punto di partenza è la considerazione che l'espressione (4.15) del tensore energia-impulso ci mostra che non è detto che $T^{\mu\nu}$ sia simmetrico, per cui in generale occorre stare molto attenti rispetto all'indice su cui si deriva per ottenere la conservazione del quadrimpulso.

Questa condizione si può ricavare direttamente dalle leggi di conservazione di $T^{\mu\nu}$ e $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ con l'espressione (4.19) di quest'ultimo, se infatti poniamo:

$$H^{\rho\mu\nu} = \pi_i^\rho \Sigma_{ij}^{\mu\nu} \phi_j$$

usando la conservazione di $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ e la (4.19) otterremo che:

$$\frac{\partial \mathcal{M}^{\rho\mu\nu}}{\partial x^\rho} = 0 = \partial_\rho (T^{\rho\mu} x^\nu - T^{\rho\nu} x^\mu) - \partial_\rho H^{\rho\mu\nu}$$

adesso qui possiamo svolgere i conti sul primo addendo ed usando la legge di conservazione per $T^{\mu\nu}$ sarà:

$$\partial_\rho (T^{\rho\mu} x^\nu - T^{\rho\nu} x^\mu) = T^{\rho\mu} \partial_\rho x^\nu - T^{\rho\nu} \partial_\rho x^\mu = T^{\rho\mu} \delta_\rho^\nu - T^{\rho\nu} \delta_\rho^\mu$$

da cui segue immediatamente:

$$T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = \partial_\rho H^{\rho\mu\nu} \quad (4.20)$$

quindi $T^{\mu\nu}$ non è simmetrico, a meno che non sia nullo $H^{\rho\mu\nu}$, cosa che avviene solo (visto che questo è il termine dovuto allo spin) solo per campi scalari.

Il teorema di Belinfante però ci assicura che è sempre possibile ottenere un tensore energia impulso equivalente che sia simmetrico. Per farlo definiamo il tensore:

$$G^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (H^{\rho\mu\nu} + H^{\mu\nu\rho} + H^{\nu\rho\mu}) \quad (4.21)$$

e verifichiamo che il tensore:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} \quad (4.22)$$

è equivalente a $T^{\mu\nu}$.

Per farlo sfruttiamo quanto visto prima, anzitutto mostriamo che $G^{\rho\mu\nu}$ è antisimmetrico nei primi due indici. Per farlo usiamo la definizione (4.21); si avrà che:

$$G^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} (H^{\mu\rho\nu} + H^{\rho\nu\mu} + H^{\nu\rho\mu})$$

adesso però sappiamo $H^{\rho\mu\nu}$ è antisimmetrico negli ultimi due indici (per le proprietà delle $\Sigma^{\mu\nu}$) per cui si avrà:

$$G^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(-H^{\mu\nu\rho} - H^{\rho\mu\nu} - H^{\nu\mu\rho})$$

e confrontando questa con la definizione (4.21) si ha la definitiva:

$$G^{\mu\rho\nu} = -G^{\rho\mu\nu}$$

quindi l'antisimmetria è dimostrata, l'altra condizione poi è immediatamente soddisfatta in quanto $G^{\rho\mu\nu}$ è una combinazione lineare dei campi e pertanto dato che si annullano all'infinito lo fa pure lui.

Adesso quello che si deve far vedere è che $\Theta^{\mu\nu}$ è simmetrico, dalla (4.22) abbiamo subito che:

$$\Theta^{\nu\mu} = T^{\nu\mu} + \partial_\rho G^{\rho\nu\mu}$$

ma per la (4.20) questa diventa:

$$\Theta^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho H^{\rho\mu\nu} + \partial_\rho G^{\rho\nu\mu}$$

e basta usare la definizione per $G^{\rho\nu\mu}$ e sviluppare il conto per ottenere:

$$\Theta^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho(2H^{\rho\mu\nu} + H^{\rho\nu\mu} + H^{\nu\mu\rho} + H^{\mu\nu\rho})$$

adesso qui consideriamo che $H^{\rho\nu\mu} = -H^{\rho\mu\nu}$ quindi si può semplificare ottenendo:

$$\Theta^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho(H^{\rho\mu\nu} + H^{\nu\mu\rho} + H^{\mu\nu\rho})$$

e se confrontiamo con la (4.21) si vede subito che questa è:

$$\Theta^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}$$

dunque $\Theta^{\mu\nu}$ è simmetrico; per questa proprietà $\Theta^{\mu\nu}$ è chiamato *tensore energia-impulso canonico*.

Con $\Theta^{\mu\nu}$ si può anche semplificare l'espressione della densità di momento angolare; se sostituiamo nella definizione a $T^{\mu\nu}$ infatti si ha:

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \left(\Theta^{\rho\mu} - \frac{\partial G^{\lambda\rho\mu}}{\partial x^\lambda}\right)x^\nu - \left(\Theta^{\rho\nu} - \frac{\partial G^{\lambda\rho\nu}}{\partial x^\lambda}\right)x^\mu - H^{\rho\mu\nu}$$

vale a dire, svolgendo i conti:

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \Theta^{\rho\mu}x^\nu - \Theta^{\rho\nu}x^\mu - \left[\frac{\partial G^{\lambda\rho\mu}}{\partial x^\lambda}x^\nu - \frac{\partial G^{\lambda\rho\nu}}{\partial x^\lambda}x^\mu + H^{\rho\mu\nu}\right]$$

per valutare la parentesi quadra consideriamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(G^{\lambda\rho\mu}x^\nu - G^{\lambda\rho\nu}x^\mu \right) &= \frac{\partial G^{\lambda\rho\mu}}{\partial x^\lambda}x^\nu + G^{\lambda\rho\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial G^{\lambda\rho\nu}}{\partial x^\lambda}x^\mu - G^{\lambda\rho\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} \\ &= \left(\frac{\partial G^{\lambda\rho\mu}}{\partial x^\lambda}x^\nu - \frac{\partial G^{\lambda\rho\nu}}{\partial x^\lambda}x^\mu \right) + G^{\nu\rho\mu} - G^{\mu\rho\nu} \end{aligned}$$

adesso consideriamo gli ultimi due addendi scrivendoceli esplicitamente; si ha:

$$G^{\nu\rho\mu} - G^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}[H^{\nu\rho\mu} + H^{\rho\mu\nu} + H^{\mu\rho\nu} - H^{\mu\rho\nu} - H^{\rho\nu\mu} - H^{\nu\rho\mu}] = \frac{1}{2}[H^{\rho\mu\nu} - H^{\rho\nu\mu}]$$

e qui basta invertire gli ultimi due indici del secondo per avere che:

$$G^{\nu\rho\mu} - G^{\mu\rho\nu} = H^{\rho\mu\nu}$$

dunque si ottiene che:

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} (G^{\lambda\rho\mu} x^\nu - G^{\lambda\rho\nu} x^\mu) = \frac{\partial G^{\lambda\rho\mu}}{\partial x^\lambda} x^\nu - \frac{\partial G^{\lambda\rho\nu}}{\partial x^\lambda} x^\mu + H^{\rho\mu\nu}$$

quindi si può scrivere il tensore densità di momento angolare come:

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \Theta^{\rho\mu} x^\nu - \Theta^{\rho\nu} x^\mu - \partial_\lambda (G^{\lambda\rho\mu} x^\nu - G^{\lambda\rho\nu} x^\mu)$$

e allora dato che evidentemente il termine in parentesi è antisimmetrico nei primi due indici (lo è $G^{\lambda\rho\mu}$) e si annulla all'infinito (ci pensano i campi dentro $G^{\lambda\rho\mu}$) questo è un tensore perfettamente equivalente a:

$$\mathcal{M}'^{\rho\mu\nu} = \Theta^{\rho\mu} x^\nu - \Theta^{\rho\nu} x^\mu$$

che può essere usato come forma semplificata della densità di momento angolare.

4.3 I campi classici.

Abbiamo fin qui effettuato una trattazione generica della meccanica analitica dei campi, senza nessuna ipotesi specifica sulla dinamica effettiva da essi seguita (in sostanza senza specificare la rispettiva densità di lagrangiana). Da qui in avanti proveremo a vedere come questa trattazione si applica ad alcuni campi, più o meno *classici*.

4.3.1 Il campo elettromagnetico.

Il primo caso a cui vogliamo applicare quanto visto nei precedenti paragrafi è quella di una teoria di campo ben nota classicamente come quella dell'elettromagnetismo; si tratterà di farne emergere la trattazione col metodo della teoria dei campi relativistica appena mostrato.

Vediamo allora come sviluppare una trattazione lagrangiana relativistica completa del campo elettromagnetico. Al §1.4 abbiamo già visto come si esprimono in forma covariante le equazioni di Maxwell nel sistema di Gauss, per la teoria dei campi però è più utile il sistema di Heaviside-Lorentz in cui esse si semplificano in:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

partendo dalla stessa espressione (1.76) per il tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ con un procedimento identico possiamo ottenere da queste equazioni classiche la corrispondente espressione in forma relativistica, che è:

$$\text{div} F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \quad \text{e} \quad \text{rot} F^{\mu\nu} = \text{div} \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

dove $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ è il duale del tensore elettromagnetico, definito secondo la (1.29), già introdotto anche nella formulazione relativistica dell'elettromagnetismo svolta in §1.4.

A queste va aggiunta la conservazione della carica si esprime ancora con l'equazione di continuità $\partial_\mu j^\mu = 0$. Come già detto queste equazioni covarianti esprimono l'invarianza relativistica delle leggi dell'elettromagnetismo: due importanti invarianti connessi col campo elettromagnetico, che si ottengono immediatamente dalle contrazioni del tensore elettromagnetico, sono allora:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= -\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} &= -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

per esprimere le leggi dell'elettromagnetismo nei termini di una teoria del campo elettromagnetico ci occorre allora individuare quali sono le variabili di configurazione e la lagrangiana.

Ad un primo approccio sembrerebbe naturale usare come variabili di configurazione i campi $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, ma le equazioni di Maxwell, che dovremmo riottenere dalla teoria, sono del primo ordine, mentre le equazioni di Eulero del §4.2 sono del secondo ordine, inoltre in un tal modo otterremmo anche grosse difficoltà a far emergere in modo naturale la covarianza del procedimento.

Per questo motivo si introduce il quadripotenziale A^μ col quale si possono trasformare le equazioni di Maxwell del primo ordine in un insieme di equazioni equivalenti del secondo ordine; abbiamo già visto che i campi si possono esprimere nella forma:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4.23)$$

ed in prossimità di un punto, preso come origine, si può esprimere il quadripotenziale come:

$$A^\mu(x) = - \int_0^1 \lambda F^{\mu\nu}(\lambda x) x_\nu d\lambda$$

sappiamo poi che il quadripotenziale non è definito univocamente, ma a meno di un gradiente di una qualsiasi funzione, il che permette di definire le trasformazioni di gauge come:

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \phi(x)$$

usando la divergenza del tensore elettromagnetico, dalla definizione (4.23), si può ottenere l'equazione per il quadripotenziale che è equivalente alle equazioni di Maxwell; si ha:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} j^\nu$$

che si scrive in forma compatta come:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial \cdot A) = \frac{1}{c} j^\nu \quad (4.24)$$

che è manifestamente invariante per trasformazioni di gauge, come si può verificare con una sostituzione.

L'arbitrarietà connessa alla scelta della condizione di gauge permette allora di semplificare enormemente i calcoli, ma in certi casi può anche distruggere la covarianza manifesta delle equazioni; se scriviamo esplicitamente la (4.24) otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho &= \square \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \frac{1}{c} \mathbf{J} &= \square \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \end{aligned}$$

che sono piuttosto complicate, per cui la scelta di una opportuna condizione di gauge può essere di grande aiuto.

Consideriamo come esempio l'uso della gauge di Poisson ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$); essa permette di eliminare ogni derivata rispetto al tempo dalla prima di queste due equazioni, che diventa così un vincolo indipendente dal tempo, e permette di determinare il potenziale come:

$$\phi = \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\rho(x', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

per cui poi solo il potenziale vettore viene ad obbedire ad una equazione delle onde che è:

$$\square \mathbf{A} = \frac{1}{c} \mathbf{J} - \nabla \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x', t) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

la trattazione è perfettamente coerente e viene usata spesso quando si fanno studi di interazione del campo elettromagnetico con sistemi legati; essa presenta poi l'enorme vantaggio di aver rimosso ogni ulteriore arbitrarietà dei potenziali, ma in questo modo si perde completamente la covarianza manifesta della teoria.

La gauge più usata però è quella di Lorentz in cui $\partial \cdot A = 0$. Questa ha il grande pregio di mantenere manifesta la covarianza della teoria e di semplificare le (4.24), dando luogo a delle equazioni (le equazioni delle onde trovate al §1.4) identiche per tutte le componenti dei potenziali; essa però, come vedremo in seguito, non rimuove completamente l'arbitrarietà dei potenziali.

Vogliamo dunque trovare una formulazione lagrangiana invariante per la teoria dell'elettromagnetismo, per usare quanto visto ai precedenti paragrafi; allora cercheremo anzitutto l'espressione della lagrangiana del campo elettromagnetico in termine dei potenziali A^μ . Questo però comporta un problema; sappiamo infatti che i potenziali non sono delle quantità osservabili direttamente, dato che dipendono dalla scelta della gauge; questo causerà delle difficoltà nella quantizzazione perché essi non possono essere considerati come variabili dinamiche indipendenti; per ora comunque ci limiteremo a cercare un'espressione per la densità di lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo elettromagnetico con la quale poi esprimere anche le altre quantità misurabili.

Per trovare $\mathcal{L}$ partiamo dal fatto che sappiamo che il quadripotenziale A^μ è un quadrivettore, mentre ci occorre uno scalare invariante funzione di esso e delle sue derivate prime. L'invarianza di gauge delle equazioni del moto non comporta automaticamente anche quella della lagrangiana; sappiamo infatti che tutte le possibili scelte di una lagrangiana a meno della quadridivergenza di una funzione qualunque danno luogo alle stesse equazioni del moto, per cui dall'invarianza di gauge otteniamo solo l'ulteriore richiesta che per trasformazioni di gauge dei potenziali la lagrangiana debba avere al più una divergenza aggiuntiva.

La cosa più semplice è allora prendere una lagrangiana quadratica nei potenziali e nelle loro derivate; in questo caso la forma più generale che possiamo prendere con la condizione di avere un invariante è (per snellire la notazione useremo nel resto del paragrafo le unità naturali per cui $c = 1$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [a \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + b \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c (\partial_\mu A^\mu)^2 + d A^\mu A_\mu + e A_\mu j^\mu]$$

e da questa vogliamo ottenere le equazioni del moto (4.24) tramite le equazioni di Eulero che in questo caso possiamo scrivere come:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho_{,\sigma}} = 0$$

avendo introdotto per snellire le formule la notazione $A^\rho_{,\sigma} = \partial_\sigma A^\rho$, con la quale la precedente lagrangiana si scrive come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [a A^\nu_{,\mu} A_\nu^{,\mu} + b A^\nu_{,\mu} A^\mu_{,\nu} + c (A^\mu_{,\mu})^2 + d A^\mu A_\mu + e A_\mu j^\mu]$$

calcoliamoci allora le derivate dei singoli pezzi della lagrangiana: dato che i primi tre dipendono solo dalle derivate dei campi il primo termine della contiene solo gli ultimi due; viceversa il secondo termine dipenderà solo dai primi tre.

Cominciamo dalle derivate rispetto alle variabili canoniche (cioè i quadripotenziali A^ρ) usando la relazione base $\partial A^\mu / \partial A^\rho = \delta^\mu_\rho$; il primo termine da esaminare è:

$$\frac{\partial}{\partial A^\rho} A^\mu A_\mu = \frac{\partial}{\partial A^\rho} g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho A^\nu + \delta^\nu_\rho A^\mu) = 2A_\rho$$

il secondo pezzo è ancora più facile da ottenere:

$$\frac{\partial}{\partial A^\rho} A^\mu j_\mu = j_\rho$$

le derivate delle derivate dei campi sono invece un po' più delicate da fare, e bisogna stare attenti a non fare confusione con gli indici, la relazione base infatti è:

$$\frac{\partial}{\partial A^\rho{}_{,\sigma}} A^\nu{}_{,\mu} = \delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\mu$$

cominciamo allora col primo termine contenente le derivate dei potenziali, si avrà:

$$\frac{\partial}{\partial A^\rho{}_{,\sigma}} A^\nu{}_{,\mu} A^\mu{}_{,\nu}$$

adesso qui avendo gli indici contratti non è immediatamente chiaro come fare le derivate, scriviamoci perciò $A^\nu{}_{,\mu} A^\mu{}_{,\nu} = g_{\alpha\nu} g^{\mu\beta} A^\nu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\beta}$ e adesso avendo tutto in termini di indici diversi potremo derivare rispetto alle $A^\rho{}_{,\sigma}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A^\rho{}_{,\sigma}} [g_{\alpha\nu} g^{\mu\beta} A^\nu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\beta}] &= g_{\alpha\nu} g^{\mu\beta} (\delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\mu A^\alpha{}_{,\beta} + \delta^\alpha_\rho \delta^\sigma_\beta A^\nu{}_{,\mu}) \\ &= (g_{\alpha\rho} g^{\sigma\beta} A^\alpha{}_{,\beta} + g_{\rho\nu} g^{\mu\sigma} A^\nu{}_{,\mu}) \\ &= 2A_\rho{}^{,\sigma} \end{aligned}$$

il secondo termine nelle derivate lo trattiamo allo stesso modo; riscrivendoci anzitutto $A^\nu{}_{,\mu} A^\mu{}_{,\nu} = \delta^\beta_\nu \delta^\mu_\alpha A^\nu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\beta}$, dunque si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A^\rho{}_{,\sigma}} \delta^\beta_\nu \delta^\mu_\alpha A^\nu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\beta} &= \delta^\beta_\nu \delta^\mu_\alpha (\delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\mu A^\alpha{}_{,\beta} + \delta^\alpha_\rho \delta^\sigma_\beta A^\nu{}_{,\mu}) \\ &= (\delta^\beta_\rho \delta^\sigma_\alpha A^\alpha{}_{,\beta} + \delta^\rho_\sigma \delta^\mu_\nu A^\nu{}_{,\mu}) \\ &= 2A^\sigma{}_{,\rho} \end{aligned}$$

per l'ultimo termine nelle derivate scriviamoci $(A^\mu{}_{,\mu})^2 = A^\mu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\alpha} = \delta^\mu_\nu \delta^\beta_\alpha A^\nu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\beta}$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A^\rho{}_{,\sigma}} \delta^\mu_\nu \delta^\beta_\alpha A^\nu{}_{,\mu} A^\alpha{}_{,\beta} &= \delta^\mu_\nu \delta^\beta_\alpha (\delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\mu A^\alpha{}_{,\beta} + \delta^\alpha_\rho \delta^\sigma_\beta A^\nu{}_{,\mu}) \\ &= (\delta^\sigma_\rho \delta^\beta_\alpha A^\alpha{}_{,\beta} + \delta^\rho_\sigma \delta^\mu_\nu A^\nu{}_{,\mu}) \\ &= 2\delta^\sigma_\rho A^\mu{}_{,\mu} \end{aligned} \tag{4.25}$$

e sostituendo tutte queste nella precedente espressione tentativa per la lagrangiana ed applicando le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono le equazioni del moto che sono:

$$e \frac{1}{2} j_\rho + dA_\rho = \partial_\sigma (a A_\rho{}^{,\sigma} + b A^\sigma{}_{,\rho} + c \delta^\sigma_\rho A^\mu{}_{,\mu}) = a \partial_\sigma \partial^\sigma A_\rho + b \partial_\sigma \partial_\rho A^\sigma + c \partial_\sigma \partial_\mu A^\mu$$

in questa poi si può notare che gli ultimi due addendi, dato che l'indice su cui si somma può è muto e le derivate commutano, danno due termini identici da poter raccogliere, per cui dal confronto di questa con la (4.24) si ottiene banalmente che $e = 2$, $d = 0$, $a = 1$ e $b + c = -1$, e con questi valori, sostituendo $b = -c - 1$ si può riscrivere la lagrangiana come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu]) + j^\mu A_\mu \quad (4.26)$$

e qui possiamo abbassare e alzare gli indici nei primi due addendi ottenendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + c[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu]) + j^\mu A_\mu$$

adesso però consideriamo che:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

e qui basta cambiare nome agli indici, che tanto sono muti, per ottenere che:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu)$$

che sostituita nella precedente espressione di $\mathcal{L}$ ci porta alla espressione:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu + \frac{c}{2}[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu] \quad (4.27)$$

adesso però si può vedere subito facendo i conti che:

$$(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu = \partial_\mu [A_\nu (g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu)]$$

quindi il termine indeterminato in c è una quadridivergenza e pertanto può essere anche eliminato essendo inessenziale, resta così l'espressione finale:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \quad (4.28)$$

Un modo diverso di ottenere questo risultato è quello di partire dalle equazioni del moto scritte come:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu = 0$$

ed ottenere un principio di minima azione che ci permetta di identificare una lagrangiana moltiplicando queste per una variazione infinitesima dei campi δA_ν (che sia nulla agli estremi) ed integrando sul quadrivolume compreso fra due ipersuperfici $t = t_1$ e $t = t_2$ ottenendo che:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d^4x (\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu) \delta A_\nu = - \int_{t_1}^{t_2} d^4x (F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) + j^\nu \delta A_\nu)$$

(dove si è integrato per parti il primo addendo sfruttando l'annullarsi di δA_ν agli estremi); adesso per il secondo addendo è immediato considerare che:

$$j^\nu \delta A_\nu = \delta(j^\nu A_\nu)$$

dato che j^ν non dipende dai campi; per il primo termine invece consideriamo che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, pertanto nella contrazione con $\delta(\partial_\mu A_\nu)$ si ha che il pezzo dovuto alla parte simmetrica di questo termine è identicamente nullo, dunque la sola parte significativa del prodotto è quella con la parte antisimmetrica e si ha che:

$$F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}$$

adesso una immediata generalizzazione della formula $\delta A^2 = 2A\delta A$ ci dice che:

$$F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

(basta applicarla termine a termine) dunque alla fine si ha:

$$0 = - \int_{t_1}^{t_2} d^4x \delta \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \right) = -\delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \right)$$

e allora è immediata l'identificazione:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Si noti che in presenza di una corrente esterna questa lagrangiana non è invariante per trasformazioni di gauge, però il termine aggiuntivo che otteniamo è nella forma:

$$j_\mu \partial^\mu \phi = \partial^\mu (j_\mu \phi)$$

dove il passaggio è giustificato dato che per l'equazione di continuità $\partial^\mu j_\mu = 0$; questo ci porta all'invarianza delle equazioni di Maxwell, ma ci dice anche che la conservazione della carica è condizione necessaria e sufficiente per l'invarianza di gauge della teoria.

Per la sua importanza nel caso quantistico possiamo partire anche da un altro punto di vista, restringendo l'arbitrarietà di A^μ ; la scelta più ovvia per mantenere il formalismo covariante è la gauge di Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{4.29}$$

che riduce la (4.24) a:

$$\square A^\mu = j^\mu \tag{4.30}$$

e dove l'arbitrarietà di ϕ per trasformazioni di gauge è ridotta ai soli ϕ che soddisfino l'equazione delle onde:

$$\square \phi = 0$$

Il procedimento ci dice cioè che scelta una lagrangiana nella forma (4.28) la conservazione della carica implica l'invarianza di gauge e viceversa; dal principio di minima azione si ottengono poi le equazioni di Maxwell.

Si può però fare una trattazione alternativa in cui la gauge di Lorentz può essere incorporata nella teoria: infatti se aggiungiamo un termine $\frac{1}{2}\lambda(\partial \cdot A)^2$ alla lagrangiana (4.28) questo porta nelle equazioni del moto(4.24) un termine ulteriore:

$$\frac{1}{2}\lambda\partial_\sigma \left[\frac{\partial}{\partial A^\rho_{,\sigma}} (\partial \cdot A) \right] = \lambda\partial_\sigma \delta^\sigma_\rho A^\mu_{,\mu} = \lambda\partial_\rho (\partial \cdot A)$$

(si è utilizzata la (4.25) per il passaggio intermedio) che così diventerebbero:

$$\square A^\nu + (\lambda - 1)\partial^\nu (\partial \cdot A) = j^\nu \tag{4.31}$$

adesso qui prendiamo la divergenza di ambo i membri ed usiamo al solito l'equazione di continuità; si ottiene che:

$$\lambda \square \partial^\nu A^\nu = 0$$

per cui se $\lambda \neq 0$ si può concludere che:

$$\square \partial_\nu A^\nu = 0 \tag{4.32}$$

e basta che $\partial_\nu A^\nu$ vada a zero per $|t| \rightarrow \infty$ per avere $\partial_\nu A^\nu = 0$ a tutti i tempi, si è cioè ottenuta la condizione di Lorentz, che sostituita nella (4.31) ci dà le equazioni delle onde.

In questo caso si parte dalla scelta della lagrangiana e dalla conservazione della carica: il principio di minima azione implica la (4.32), mentre le condizioni al contorno implicano la gauge di Lorentz e le equazioni di Maxwell nella forma di equazioni di D'Alambert per i potenziali.

4.3.2 Il campo di Klein-Gordon.

Al paragrafo precedente abbiamo visto come si effettua la trattazione lagrangiana relativistica del campo elettromagnetico, un campo noto come tale anche nella meccanica classica non relativistica, e che sappiamo non trasportare massa. Il fatto che da una teoria di campo si possano ottenere delle equazioni differenziali suggerisce allora di provare a considerare le equazioni quantistiche non tanto come equazioni per delle funzioni d'onda che vengono dalla quantizzazione delle variabili canoniche classiche, ma come equazioni di Eulero-Lagrange di un opportuno campo classico che verrebbe in tal modo a descrivere un sistema fisico da identificare opportunamente.

L'equazione più facile da prendere in esame è ovviamente quella di Klein-Gordon, che coinvolge un solo campo ϕ ; è immediato notare che se prendiamo come lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_\mu) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = \frac{1}{2}(\phi_\mu \phi^\mu - m^2 \phi^2) \quad (4.33)$$

le equazioni del moto ci danno immediatamente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} = -m^2 \phi - \frac{1}{2} \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} (\phi_\mu \phi^\mu)$$

adesso però consideriamo che:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_\mu} (\phi_\mu \phi^\mu) = \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} (g^{\rho\sigma} \phi_\rho \phi_\sigma) = (g^{\rho\sigma} \delta_\sigma^\mu \phi_\rho + g^{\rho\sigma} \delta_\rho^\mu \phi_\sigma) = 2\phi^\mu$$

e sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\partial_\mu \phi^\mu + m^2 \phi = (\square + m^2)\phi = 0$$

dunque l'equazione di Klein-Gordon deriva direttamente da un campo che ha come lagrangiana la (4.33). Si noti poi che questa non è altro che l'estensione ai campi della lagrangiana di un oscillatore armonico; infatti se calcoliamo il momento coniugato del campo avremo che:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} = \phi^\mu$$

dunque la lagrangiana è nella forma:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_\mu) = \frac{1}{2}(\pi_\mu \pi^\mu - m^2 \phi^2)$$

che è l'esatta analoga di $L = 1/2(p^2 - kq^2)$. In maniera del tutto analoga si può far vedere come partendo da una lagrangiana analoga non relativistica si può ottenere l'equazione di Schroedinger.

Tutto ciò ci dice che per ottenere la teoria quantistica non è necessario effettuare la quantizzazione delle osservabili, ma basta descrivere le particelle come dei campi invece che come punti materiali.

La (4.33) definisce la lagrangiana di un campo scalare reale; in realtà per avere l'equazione di Klein-Gordon occorre un campo complesso, dato che si era identificata ϕ come una funzione d'onda; in tal caso allora i campi indipendenti sono due, dato che un qualunque campo complesso può sempre essere univocamente scritto come $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, anche se, come vedremo, è più utile usare come campi indipendenti ϕ e ϕ^* .

Per un campo complesso la lagrangiana si scrive immediatamente come:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \quad (4.34)$$

da cui seguono immediatamente le equazioni del moto per i campi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} &= -m^2 \phi^* - \partial^\mu \phi_\mu^* = (\square + m^2) \phi^* = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu^*} &= -m^2 \phi - \partial^\mu \phi_\mu = (\square + m^2) \phi = 0\end{aligned}$$

che evidentemente sono l'una la coniugata dell'altra; si noti comunque che il campo di Klein-Gordon complesso oltre alla evidente invarianza relativistica abbia in più l'invarianza rispetto al gruppo $U(1)$ delle moltiplicazioni per una qualunque fase complessa $e^{i\lambda\phi}$.

4.3.3 Il campo di Dirac.

Al paragrafo precedente abbiamo visto come sia possibile ottenere l'equazione di Klein-Gordon dalle equazioni del moto di un opportuno campo (il campo di Klein-Gordon), lo scopo è allora quello di ottenere anche l'equazione di Dirac dalla dinamica di un opportuno campo (ovviamente spinoriale).

4.4 Il formalismo hamiltoniano.

Fin qui la dinamica dei campi è stata mostrata nel formalismo lagrangiano, che è il più naturale per mostrare la covarianza relativistica delle equazioni; per la quantizzazione però il framework naturale è quello hamiltoniano (lo vedremo nel prossimo capitolo).

Benché in questo modo si venga a perdere la covarianza esplicita, la trattazione hamiltoniana è comunque possibile, inoltre risulta utile per introdurre un po' di formalismo funzionale, molto utile per la trattazione coi path integral.

Capitolo 5

La quantizzazione dei campi.

Al precedente capitolo abbiamo visto come le equazioni della meccanica quantistica relativistica possano essere interpretate come equazioni di campo, passando cioè a descrivere anche le particelle come gli elettroni in termini di campi invece che di punti materiali; fin qui la quantizzazione non c'entra, tutto si può spiegare in termini di campi classici analoghi al campo elettromagnetico; questo però non basta, perché sappiamo che il più classico dei campi, quello conosciuto come tale fin dall'inizio, il campo elettromagnetico, non può essere descritto in termini classici poiché presenta comportamenti quantistici.

E' pertanto necessario effettuare quella che viene chiamata *seconda quantizzazione*, cioè passare dalle equazioni quantistiche ottenute con la meccanica dei campi alla quantizzazione dei campi stessi.

5.1 La procedura della seconda quantizzazione.

Per effettuare la seconda quantizzazione occorre rifarsi al §4.1.1, dove abbiamo visto come la meccanica dei campi sia ottenibile attraverso un processo di discretizzazione in cui poi si va a sostituire all'indice discreto i la variabile continua x ; se ci rifacciamo alla meccanica quantistica classica sappiamo che le condizioni di quantizzazione sono espresse tramite il commutatore fra gli operatori associati alle variabili canoniche:

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Abbiamo visto al § 4.4 che per un campo di lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu\phi)$ il momento coniugato al campo ϕ è:

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi(\mathbf{x}, t)}$$

e allora la generalizzazione immediata della procedura di quantizzazione è quella di passare a considerare $\pi(\mathbf{x}, t)$ e $\phi(\mathbf{x}, t)$ come operatori generalizzando il commutatore in:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

5.2 Il campo di Klein-Gordon.

5.3 Il campo elettromagnetico.

Abbiamo già visto al §4.3.1 la trattazione lagrangiana covariante delle leggi di Maxwell; la procedura di quantizzazione canonica si applica ai campi $\phi(x)$ standard costruendo i momenti

coniugati $\pi(x)$ definiti dalla relazione:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

analoga a quella per sistemi finiti $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$; ovviamente la procedura di quantizzazione si applica quando, come fatto finora, si ha a che fare con campi indipendenti; nel caso del campo elettromagnetico però la trattazione lagrangiana che da le equazioni del moto coinvolge il potenziale A^μ le cui componenti non sono indipendenti in quanto a causa dell'invarianza di gauge possono essere soggetti a vincoli del tipo delle condizioni di gauge.

Per semplificare le cose tratteremo solo il caso del campo libero; in questo caso la lagrangiana del campo (4.28) si riduce a:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

le equazioni del moto, dato che $\mathcal{L}$ non dipende direttamente dagli A^μ si riducono a:

$$\partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0$$

dove $A_{\mu,\nu} = \partial_\nu A_\mu$; adesso riscriviamo esplicitamente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} (A_{\rho,\sigma} - A_{\sigma,\rho})$$

per cui avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} &= -\frac{1}{4} [(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} (A_{\rho,\sigma} - A_{\sigma,\rho}) + (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu)] \\ &= -\frac{1}{4} [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (A_{\rho,\sigma} - A_{\sigma,\rho}) - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (A_{\rho,\sigma} - A_{\sigma,\rho}) + \\ &\quad + (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}] \\ &= -\frac{1}{4} [(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) - (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) + (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) - (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})] \\ &= -F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.1}$$

dunque le equazioni del moto diventano:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 = \partial^2 A_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) = (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu$$

se facciamo una trasformazione di gauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \phi$ vediamo subito che queste sono invarianti, infatti:

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) \partial^\mu \phi = \partial_\nu \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu \partial^\mu = 0$$

per la commutabilità delle derivate. Dunque l'operatore d'onda ha un autovettore nullo essendo:

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) \partial^\mu = 0$$

e questo ci dice che le equazioni del moto non sono indipendenti, infatti essendo $\partial^\mu \partial^\nu$ simmetrico e $F_{\mu\nu}$ antisimmetrico è $\partial^\nu (\partial^\mu F_{\mu\nu}) = 0$ identicamente.

Dalla (5.1) si ottiene subito che l'espressione per gli impulsi canonici è:

$$\Pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,0}} = -F^{0\nu} = -\partial^0 A^\nu + \partial^\nu A^0 = -\dot{A}^\nu + \partial^\nu A^0$$

dunque si ottiene che:

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= 0 \\ \Pi^k &= -\dot{A}^k + \partial^k A^0 = E_k \end{aligned} \tag{5.2}$$

inoltre si ha che la matrice hessiana del cambiamento di variabile è singolare, infatti dalla (5.1) si ottiene subito che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu} \partial A_{\rho,\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial A_{\mu,\nu}} (-F^{\rho\sigma}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= -g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) = -g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \\ &= -g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}\end{aligned}$$

per cui è banalmente:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,0} \partial A_{\nu,0}} = -g^{\nu\mu} g^{00} + g^{\rho 0} g^{0\mu} = -g^{\mu\nu} + g^{0\mu} g^{\nu 0}$$

che è singolare. La prima delle (5.2) dà un chiaro vincolo sugli impulsi canonici, inoltre da questa singolarità segue la non invertibilità della relazione fra impulsi e coordinate canoniche; questo dipende dal fatto che essendo componenti di $F^{\mu\nu}$ gli impulsi canonici sono invarianti di gauge, e pertanto non possono dipendere da tutte e quattro le $\dot{A}^\mu$.

Oltre a questo si ha una ulteriore relazione fra gli impulsi canonici, che è conseguenza delle equazioni del moto, esse infatti si possono scrivere come:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}} = \dot{\Pi}^\nu + \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,k}} = 0$$

se prendiamo $\nu = 0$ da $\Pi^0 = 0$ segue subito che:

$$\partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{0,k}} = -\partial_k F^{k0} = \partial_k F^{0k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,0}} = -\partial_k \Pi^k = 0$$

dunque si ottiene che

$$\partial_k \Pi^k = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

questa equazione non coinvolge le derivate temporali e pertanto la si può considerare un ulteriore vincolo che costringe i Π^k ad essere a divergenza nulla a qualunque istante.

Il problema che si ha adesso di fronte è quello di come effettuare la quantizzazione di una teoria dove l'invarianza di gauge comporta dei vincoli, usando la procedura standard e mantenendo la covarianza a vista; vedremo che questo è molto complesso e che in realtà si riesce a farlo bene solo con una trattazione diversa da quella seguita finora.

Le strade per effettuare la quantizzazione possono essere diverse, una prima può essere quella di rinunciare alla covarianza a vista per andare a cercare i gradi di libertà effettivi e poi quantizzare quelli con la procedura canonica; si otterranno così una serie di relazioni che non sono né covarianti e né gauge invarianti, e bisognerà poi dimostrare alla fine (cosa tutt'altro che banale) che i risultati ottenuti per le quantità fisiche sono effettivamente covarianti e gauge invarianti.

Un'altra strada è quella di modificare la lagrangiana per avere un momento coniugato non nullo ed usare la quantizzazione ordinaria introducendo dei gradi di libertà fittizi; questo conduce a uno spazio di Hilbert più ampio del voluto (e tra l'altro con metrica indefinita) su cui però si può definire un sottospazio degli stati fisici, conservato nelle interazioni, su cui si va a costruire la teoria, dimostrando che si conserva la covarianza e l'invarianza di gauge.

Una terza strada, che è quella in cui è più facile far emergere la covarianza della teoria, è l'uso del metodo del path integral si ha una formulazione finale estremamente intuitiva, anche se per ottenerla il procedimento è tutt'altro che banale, perché occorre scrivere il path integral prima per una gauge generica in cui ci si sia ridotti ai campi effettivamente indipendenti, e poi

tornare indietro agli A^μ generici con un opportuno procedimento che porti a una covarianza a vista della teoria.

L'espressione generica per il path integral di un campo di lagrangiana $\mathcal{L}$ è data da:

$$\int \mathcal{D}(\phi)_e \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)(x)$$

nel caso del campo elettromagnetico non possiamo scrivere banalmente:

$$\int \mathcal{D}(A^\mu)_e \int d^4x \mathcal{L}(A^\mu, A^{\mu,\nu})(x)$$

perché non essendo gli A^μ indipendenti stiamo sommando anche su gradi di libertà fittizi e questa espressione non ha più significato. Dovremmo allora ridurci ai soli gradi di libertà indipendenti fissando una condizione di gauge $g(A^\mu) = 0$.

L'idea è che se introduciamo la delta di Dirac funzionale, cioè il funzionale $\delta[\phi]$ tale che:

$$\int \mathcal{D}(\phi) \delta[\phi] F[\phi] = F[0]$$

in maniera molto ingenua possiamo cancellare i gradi di libertà fittizi nel path integral scrivendolo semplicemente come:

$$\int \mathcal{D}(A^\mu) \delta[g]_e \int d^4x \mathcal{L}(A^\mu, A^{\mu,\nu})(x)$$

e basta prendere una condizione di gauge covariante (come la gauge di Lorentz) per avere la covarianza a vista della teoria.

Questa è effettivamente la formula che si ottiene, ma bisogna mostrare che la procedura è corretta partendo da ciò che si sa essere corretto, cioè il path integral applicato a campi indipendenti.

Bibliografia

- [Jac] J. D. Jackson. *Elettrodinamica classica*.
- [LL] L. D. Landau and E. M. Lifshits. *Meccanica*.
- [Mes] C. A. Messiah. *Quantum Mechanics*.